Devoir de Mathématiques

Pour le 3 juin 2021

❖ Problème ❖

On note cot la fonction *cotangente* définie par

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

1. Démontrer que la fonction cot réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin(2n+1)\theta = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} (-1)^{n-k} \cos^{2k}\theta . \sin^{(2n+1)-2k}\theta.$$

3. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique polynôme P_n à coefficients réels tel que

$$\forall\, \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad P_n(\cot^2\theta) = \frac{\sin\left[(2n+1)\theta\right]}{\sin^{2n+1}\theta}.$$

4. Donner en fonction de n le degré de P_n, son coefficient dominant, la somme de ses racines ainsi que le produit de ses racines.

5. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, le polynôme P_n possède n racines réelles strictement positives distinctes.

6. a. Démontrer que

$$\forall\, \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \cot^2\theta \leqslant \frac{1}{\theta^2} \leqslant 1 + \cot^2\theta.$$

6. b. En déduire que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \frac{\pi^2(2n-1)n}{3(2n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2(2n-1)n}{3(2n+1)^2} + \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2}.$$

et conclure.

Solution ❁ Une série célèbre

1. La fonction cot est définie et dérivable sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (en tant que quotient de fonctions dérivables) et sur cet intervalle,

$$\cot'(x) = -(1+\cot^2 x) = \frac{-1}{\sin^2 x} < 0.$$

Elle tend vers $+\infty$ au voisinage droit de 0 et vers 0 au voisinage de $\pi/2$. Par conséquent, la fonction cot réalise une bijection (strictement décroissante) de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0, 1[$.

2. Pour tout entier naturel n et pour tout réel θ,

$$\sin(2n+1)\theta = \mathfrak{Im}(e^{i(2n+1)\theta}) = \mathfrak{Im}\big((\cos\theta + i\sin\theta)^{2n+1}\big).$$

D'après la formule du binôme et en scindant la somme obtenue en deux parties selon la parité de l'indice,

$$\begin{aligned} e^{i(2n+1)\theta} &= \sum_{p=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{p}\cos^p\theta.\sin^{(2n+1)-p}\theta.i(i^{2n-p}) \\ &= i\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(-1)^{n-k}\cos^{2k}\theta.\sin^{(2n+1)-2k}\theta && \text{(p pairs)} \\ &\qquad + \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^{n-k}\cos^{2k+1}\theta.\sin^{2(n-k)}\theta. && \text{(p impairs)} \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin(2n+1)\theta = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(-1)^{n-k}\cos^{2k}\theta.\sin^{(2n+1)-2k}\theta.$$

3. Si P_n et R_n sont deux polynômes tels que

$$\forall\,\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad P_n(\cot^2\theta) = R_n(\cot^2\theta).$$

D'après **1.**, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $0 < \theta < \pi/2$ tel que $x = \cot^2\theta$, donc P_n et Q_n coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un ensemble infini, on en déduit que $P_n = R_n$. Il existe donc au plus un polynôme vérifiant la propriété voulue.

Lorsque $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, on divise l'identité du **2.** par $\sin^{2n+1}\theta$ (qui est strictement positif [1]) et on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(-1)^{n-k}\frac{\cos^{2k}\theta}{\sin^{2k}\theta} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(-1)^{n-k}(\cot^2\theta)^k. \end{aligned}$$

Ainsi le polynôme

$$P_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(-1)^{n-k}X^k \tag{$\star$}$$

répond à la question.

4. D'après $(\star)$, le degré du polynôme P_n est égal à n, son coefficient dominant à $\binom{2n+1}{2n} = 2n+1$. La somme de ses racines se déduit du coefficient de degré $n-1$ et vaut

$$-\frac{(-1)}{2n+1}\binom{2n+1}{2(n-1)} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{3} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{1.2.3.(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

Le produit des racines se déduit du coefficient constant et vaut

$$(-1)^n\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{2n+1}{0} = \frac{1}{2n+1}.$$

REMARQUE.— Il faut savoir retrouver la somme et le produit des racines d'un polynôme à la simple lecture de ses coefficients :

$$a\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k) = aX^n + \Big[-a\Big(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\Big)\Big]X^{n-1} + \cdots + \Big[a(-1)^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\Big].$$

1. On ne divise pas par zéro, c'est mal.

5. Il est clair d'après **1.** que $\cot^2$ réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

ANALYSE.— Soit z, une racine strictement positive de P_n. Il existe alors $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ tel que $z = \cot^2\theta$ et donc tel que $P_n(\cot^2\theta) = 0$. Alors $\sin(2n+1)\theta = 0$ d'après **3.**, donc $(2n+1)\theta$ est nécessairement un multiple entier de π.

SYNTHÈSE.— Pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose

$$\theta_k = \frac{k\pi}{2n+1}.$$

Tous ces nombres appartiennent à l'intervalle ouvert $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\sin\big[(2n+1)\theta_k\big] = 0$ quel que soit $1 \leqslant k \leqslant n$. D'après **3.**, les nombres réels $\cot^2\theta_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont donc des racines strictement positives du polynôme P_n.

Comme $\cot^2$ est injective sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, les n réels $\cot^2\theta_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont deux à deux distincts.

REMARQUE.— Comme $\deg P_n = n$, on sait que P_n possède au plus n racines distinctes dans $\mathbb{C}$. Par conséquent, les réels $\cot^2\theta_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont *les* racines de P_n.

6. a. L'étude des variations de sin et de tan montre que $\tan\theta > \theta > \sin\theta$ pour tout $0 < \theta < \pi/2$. Par conséquent,

$$\forall\, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \qquad \cot^2\theta = \frac{1}{\tan^2\theta} \leqslant \frac{1}{\theta^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \cot^2\theta.$$

REMARQUE.— On peut aussi établir ces inégalités à l'aide de la formule des accroissements finis.

6. b. On applique l'encadrement précédent à chacun des θ_k définis à la question **5.** et on somme ces encadrements. Comme la somme des $\cot^2\theta_k$ a été calculée en **4.** (c'est la somme des racines de P_n), on en déduit que

$$\frac{n(2n-1)}{3} = \sum_{k=1}^{n} \cot^2\theta_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\theta_k^2} \leqslant n + \sum_{k=1}^{n} \cot^2\theta_k = n + \frac{n(2n-1)}{3}.$$

D'après l'expression des θ_k (question **5.**), on en déduit que

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\,\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\left[n + \frac{n(2n-1)}{3}\right]$$

pour tout entier naturel $n \geqslant 1$. Les termes extrêmes de cet encadrement tendent tous deux vers $\pi^2/6$. Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$