Centrale MP - 950

Q 1) – On définit les deux matrices indiquées par l'énoncé.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

M10 = np.array([[3,-4,2], [2,-3,2], [0,0,1]])
M01 = np.array([[1,-1,0], [1,-1,0],[1,-1,0]])
```

On calcule ensuite les produits demandés.

```
np.dot(M10, M01)
np.dot(M01, M10)
np.dot(M01, M01)
np.dot(M10, M10)
```

On constate que ces deux matrices commutent :

$$M_{1,0}M_{0,1} = M_{0,1}M_{1,0} = M_{0,1}$$

que la matrice $M_{0,1}$ est nilpotente d'indice 2 :

$$M_{0,1}^2 = 0_3$$

et que la matrice $M_{1,0}$ est une matrice de symétrie :

$$M_{1,0}^2 = I_3.$$

Q 2) – Par définition, E est le sous-espace de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ engendré par les matrices $M_{1,0}$ et $M_{0,1}$, c'est donc un sous-espace de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$!

Le sous-espace E ne contient pas I_3 et comme $M_{1,0}^2 = I_3$, il n'est pas non plus stable par produit : aucune chance que ce soit une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$!

Q 3) – Puisque les matrices $M_{0,1}$ et $M_{1,0}$ commutent, on peut appliquer la formule du binôme :

$$\begin{aligned}\forall\, n \geqslant 2, \quad (aM_{1,0} + bM_{0,1})^n &= a^n M_{1,0}^n + na^{n-1}bM_{1,0}^{n-1}M_{0,1}\\ &= a^n M_{1,0}^n + na^{n-1}bM_{0,1}.\end{aligned}$$

(Il n'y a que deux termes dans cette somme car $M_{0,1}$ est nilpotente d'indice 2.)

❧ Si n est pair, alors $M_{1,0}^n = I_3$ et

$$\begin{aligned}(aM_{1,0} + bM_{0,1})^n = I_3 &\iff a^n I_3 + na^{n-1}bM_{0,1} = I_3 &(1)\\ &\iff (a^n - 1)I_3 + na^{n-1}bM_{0,1} = 0_3 &(2)\\ &\iff a^n = 1 \quad \text{et} \quad b = 0. &(3)\end{aligned}$$

Dans ce cas, les matrices solutions sont les matrices $aM_{1,0}$ avec a parcourant l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité. (Il y a donc n solutions distinctes.)

❧ Si n est impair, alors $M_{1,0}^n = M_{1,0}$ et

$$(aM_{1,0} + bM_{0,1})^n = I_3 \iff a^n M_{1,0} + na^{n-1}bM_{0,1} + (-1)I_3 = 0_3$$

ce qui est absurde puisqu'une telle propriété est une relation de liaison entre $M_{1,0}$, $M_{0,1}$ et I_3, alors que

$$I_3 \notin E = \mathrm{Vect}(M_{1,0}, M_{0,1})$$

(ce qui signifie que la famille $(I_3, M_{1,0}, M_{0,1})$ est libre.

Dans ce cas, il n'y a donc pas de solution.

Q 4) – On ne peut pas espérer réduire les deux matrices $M_{1,0}$ et $M_{0,1}$ simultanément (= avec une même matrice de passage) sans les étudier en détail au préalable.

❧ On a vu que $M_{0,1}$ était nilpotente d'indice 2.

C'est une matrice de rang 1, donc ses colonnes non nulles dirigent son image :

$$\operatorname{Im} M_{0,1} = \mathbb{C} \cdot (1, 1, 1)$$

et chacune de ses lignes nous donne une équation cartésienne de son noyau :

$$\operatorname{Ker} M_{0,1} = [x - y = 0].$$

On vérifie ainsi que l'image de la matrice est contenue dans son noyau (c'est pourquoi elle est nilpotente de rang 2).

❧ On sait que $M_{1,0}$ est une matrice de symétrie : elle est diagonalisable, ses valeurs propres sont ± 1 et il nous reste à identifier ses sous-espaces propres.

Les matrices

```
M10-np.eye(3)
M10+np.eye(3)
```

nous disent que

$$\operatorname{Ker}(M_{1,0} - I_3) = [x - 2y + z = 0] \quad \text{et que} \quad \operatorname{Ker}(M_{1,0} + I_3) = \mathbb{R} \cdot (1, 1, 0).$$

❧ Interprétons la matrice P cherchée comme la matrice de passage de la base canonique vers une nouvelle base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Comme $P^{-1} M_{1,0} P$ est diagonale, il faut que les trois vecteurs ε_k soient des vecteurs propres de $M_{1,0}$.

Comme $P^{-1} M_{0,1} P$ est triangulaire supérieure et que la matrice $M_{0,1}$ est nilpotente, les coefficients diagonaux doivent être nuls et il faut donc que

$$M_{0,1} \varepsilon_1 = 0, \quad M_{0,1} \varepsilon_2 = \alpha \cdot \varepsilon_1, \quad M_{0,1} \varepsilon_3 = \beta \cdot \varepsilon_1 + \gamma \cdot \varepsilon_2.$$

Le vecteur $(1, 1, 0)$ est à la fois un vecteur propre de $M_{1,0}$ (associé à la valeur propre -1) et un vecteur du noyau de $M_{0,1}$ (c'est-à-dire un vecteur propre associé à la valeur propre 0).

Le vecteur $(1, 1, 1)$ vérifie simultanément l'équation $x - y = 0$ et l'équation $x - 2y + z = 0$, donc c'est un vecteur propre de $M_{1,0}$ (associé à la valeur propre 1) et un vecteur propre de $M_{0,1}$ (associé à la valeur propre 0).

En posant $\varepsilon_1 = (1, 1, 0)$ et $\varepsilon_2 = (1, 1, 1)$, il nous reste à trouver un vecteur ε_3 linéairement indépendant de ε_1 et ε_2 (pour compléter la base) dans le sous-espace propre $\operatorname{Ker}(M_{1,0} - I_3)$. Comme les sous-espaces propres de $M_{1,0}$ sont en somme directe, il suffit de choisir ε_3 dans $\operatorname{Ker}(M_{1,0} - I_3)$, non proportionnel à ε_2. Faisons simple et prenons par exemple $\varepsilon_3 = (1, 0, -1)$.

```
P = np.array([[1,1,0], [1,1,1],[1,0,-1]]).transpose()
R10 = np.dot(np.dot(alg.inv(P), M10), P)
R01 = np.dot(np.dot(alg.inv(P), M01), P)
```

On trouve

$$P^{-1} M_{1,0} P = \operatorname{Diag}(-1, 1, 1) \quad \text{et} \quad P^{-1} M_{0,1} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q 5) – On en déduit que

$$P^{-1} M_{a,b} P = a P^{-1} M_{1,0} P + n P^{-1} M_{0,1} P = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

et par conséquent (formule du binôme évidemment)

$$P^{-1}M_{a,b}^{n}P = (P^{-1}M_{a,b}P)^{n} = \begin{pmatrix} (-a)^{n} & 0 & 0 \\ 0 & a^{n} & nba^{n-1} \\ 0 & 0 & a^{n} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$P^{-1}M_{a,b}^{n}P = I_3$$

si, et seulement si, $(-a)^{n} = a^{n} = 1$ et $b = 0$: on a bien retrouvé la caractérisation précédente.