Centrale MP - 965

Q 1) – On commence par calculer efficacement les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$: il faut pouvoir les calculer pour $0 \leqslant k \leqslant n$ à n fixé. Le mieux est de chercher une relation de récurrence :

- on initialise avec $\binom{n}{0} = 1$;
- on poursuit en remarquant que, pour $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(n-k+1)}{k.(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \binom{n}{k-1}.$$

```
def c_binom(n):
   CB = [ 1 ]
   for k in range(1, n+1):
      cb = CB[-1]*(n-k+1)//k
      CB.append(cb)
   return CB
```

REMARQUE.— La manière suivante n'est pas indiquée par l'aide-mémoire officiel du concours Centrale.

```
from scipy.special import binom as cb
def c_binom(n):
   CB = [ cb(n, k) for k in range(n+1) ]
   return CB
```

On calcule ensuite facilement les valeurs de u_n.

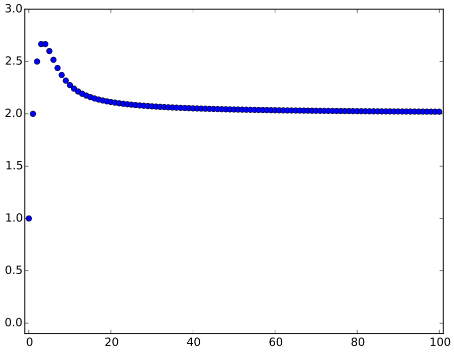
```
def u(n):
   CB = c_binom(n)
   S = 0
   for cb in CB:
      S += 1/cb
   return S
```

On vérifie bien que $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

On peut alors tracer l'évolution de u_n en fonction de $1 \leqslant n \leqslant 100$.

```
import matplotlib.pyplot as plt

liste_u = [ u(n) for n in range(101) ]
plt.plot(liste_u, 'o')
```



Il semble bien que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 2.

Q 2) – Tout d'abord, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et comme tous les coefficients binomiaux sont positifs, on en déduit que $u_n \geqslant 2$ pour tout $n \geqslant 1$.

Ensuite, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, donc la somme

$$\frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} = \frac{2}{n}$$

tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Si $n \geqslant 4$, il reste alors $(n-4)$ termes dans la somme u_n et

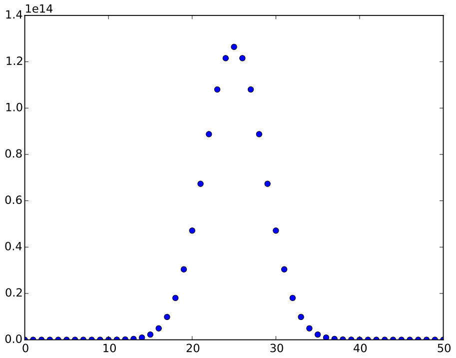
$$\forall\, 2 \leqslant k \leqslant n-2, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \geqslant \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

si bien que

$$2 \leqslant u_n \leqslant 2 + \frac{2}{n} + \frac{2(n-4)}{n(n-1)} = 2 + \mathcal{O}(1/n).$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge effectivement vers 2.

REMARQUE.— Il est important de savoir ici que la famille des $\binom{n}{k}$ est d'abord croissante, puis décroissante, ce qu'on voit bien sur la figure suivante (pour $n = 50$).



Q 3) – Cette dernière question demande de se rappeler la symétrie des coefficients binomiaux !

$$\begin{aligned}
nu_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k+k}{\binom{n}{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{\binom{n}{k}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{\binom{n}{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{\binom{n}{k}} + \sum_{\ell=0}^{n} \frac{\ell}{\binom{n}{\ell}} && \text{car } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \\
&= 2\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{\binom{n}{k}}.
\end{aligned}$$

REMARQUE.— Cette propriété est facile à vérifier en pratique grâce au code précédent.

```
def v(n):
    CB, S = c_binom(n), 0
    for k, cb in enumerate(CB):
        S += k/cb
    return S, n*u(n)/2
```