Centrale MP - 980

Q 1) – Pour $x \geqslant 0$, on pose

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(2\sqrt{x}\sin t)\,dt$$

et pour $x \leqslant 0$, on pose

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(2\sqrt{-x}\sin t)\,dt.$$

Il est clair que ces deux définitions coïncident pour $x = 0$: dans les deux cas, on a $\varphi(0) = 1$.

❧ On suit les indications du résumé *Analyse numérique*.

```
from scipy.integrate import quad
pi_sur_deux = np.pi/2

def phi(x):
    def f(t):
        if (x>0):
            return np.cosh(2*np.sqrt(x)*np.sin(t))
        else:
            return np.cos(2*np.sqrt(-x)*np.sin(t))
    return 1/pi_sur_deux*quad(f, 0, pi_sur_deux)[0]
```

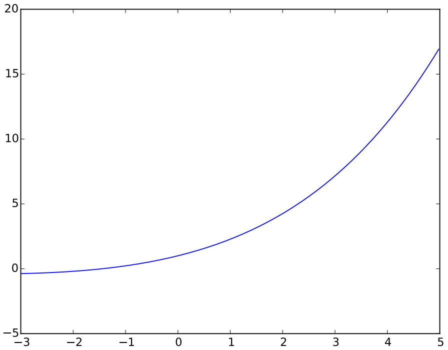
Le tracé des courbes ne pose alors pas de difficulté.

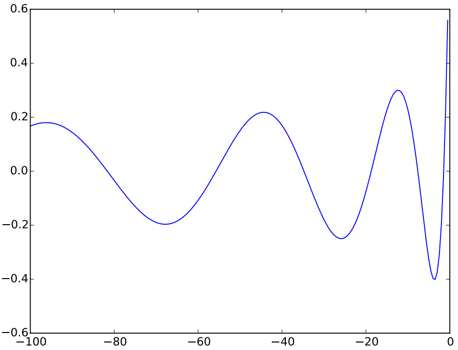
```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure()
X = np.arange(-3, 5, 0.02)
plt.plot(X, [phi(x) for x in X])

plt.figure()
X = np.arange(-100, 0, 0.5)
plt.plot(X, [phi(x) for x in X])
```

On obtient successivement les deux graphes suivants.





Q 2) – Pour tout $x > 0$,

$$\varphi(x) \geqslant \frac{2}{\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ch}(\sqrt{x})\,dt = \frac{2}{3}\operatorname{ch}(\sqrt{x})$$

donc φ tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ (avec une branche parabolique d'axe (Oy)).

Q 3) – On reconnaît les intégrales de Wallis.

Q 4) – On développe ch et cos en série entière et on justifie l'intégration terme à terme (par exemple en invoquant la convergence normale sur le segment $[0, \pi/2]$).

Q 5) – Les propriétés sont évidentes pour $x \geqslant 0$ (il suffit d'invoquer la positivité de l'intégrale).

En revanche, pour $x \leqslant 0$, ça se voit bien sur la figure, mais sinon ?