Centrale MP - 971

Q 1) – On a bien $0 \leqslant x_0 \leqslant 7$ et $0 \leqslant y_0 \leqslant 7$.
Si x_n et y_n sont bien définis et si $0 \leqslant x_n, y_n \leqslant 7$, alors

$$x_{n+1} = \sqrt{7 - y_n} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \sqrt{7 + x_n}$$

sont bien définis et de plus

$$0 \leqslant x_{n+1} \leqslant \sqrt{7} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \sqrt{7} \leqslant y_{n+1} \leqslant \sqrt{14} \leqslant 7.$$

On a ainsi démontré par récurrence que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant x_n, y_n \leqslant 7.$$

REMARQUE.— On aurait pu raisonner avec K au lieu de $[0, 7] \times [0, 7]$ mais, pour le moment, ça n'avait pas d'intérêt.

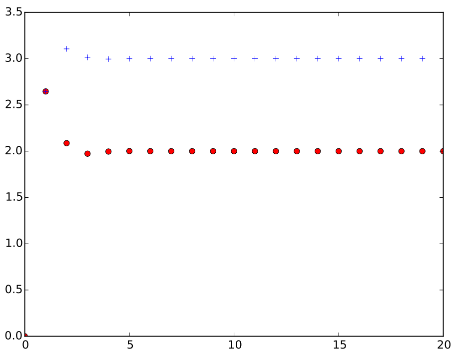
Q 2) – Le calcul des 20 premiers termes ne pose pas de difficulté.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def xy(n):
   x, y = 0, 0
   liste_x, liste_y = [x], [y]
   for i in range(n):
      x, y = np.sqrt(7-y), np.sqrt(7+x)
   liste_x.append(x)
   liste_y.append(y)
   return liste_x, liste_y

Lx, Ly = xy(20)
plt.plot(Lx, 'ro')
plt.plot(Ly, 'b+')
```

On constate que les x_n sont rapidement proches de 2 et que les y_n sont rapidement proches de 3.



Q 3) – Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et si la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_2, alors on déduit de la relation de récurrence que

$$\ell_1 = \sqrt{7 - \ell_2} \quad \text{et que} \quad \ell_2 = \sqrt{7 + \ell_1}$$

(par composition de limites). On en déduit que

$$\ell_1^2 + \ell_2 = 7 = \ell_2^2 - \ell_1$$

et donc que

$$\underbrace{(\ell_1+\ell_2)}_{>0}\cdot(\ell_1-\ell_2+1)=0.$$

On a donc

$$\ell_1^2+\ell_1+1=7 \quad \text{et} \quad \ell_2^2-\ell_2+1=7$$

avec $\ell_1 \geqslant 0$ et $\ell_2 \geqslant 0$ (en tant que limites de suites positives). On en déduit que $\ell_1 = 2$ et $\ell_2 = 3$, conformément à la figure ci-dessus.

Q 4) – En raisonnant comme plus haut, on constate que le compact K est stable par f. Comme $(x_0, y_0) \in K$, on en déduit que tous les (x_n, y_n) appartiennent à K.

❧ Soient $(a, b) \in K$ et $(x, y) \in K$. Par définition de la norme $\|\cdot\|_1$,

$$\big\|f(x,y)-f(a,b)\big\|_1 = \big|\sqrt{7-y}-\sqrt{7-b}\big| + \big|\sqrt{7+x}-\sqrt{7+a}\big|.$$

Les fonctions $\theta = \big[t \mapsto \sqrt{7-t}\big]$ et $\chi = \big[t \mapsto \sqrt{7+t}\big]$ sont dérivables et

$$\forall\, 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{7}, \quad \big|\chi'(t)\big| = \frac{1}{2\sqrt{7+t}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{7}}$$
$$\forall\, 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{7+\sqrt{7}}, \quad \big|\theta'(t)\big| = \frac{1}{2\sqrt{7-t}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, les fonctions χ et θ sont lipschitziennes et admettent

$$k = \frac{1}{2\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}} \approx 0,253$$

pour constante de Lipschitz commune. On en déduit que

$$\big\|f(x,y)-f(a,b)\big\|_1 \leqslant k|y-b| + k|x-a| = k\|(x,y)-(a,b)\|_1$$

et on a bien $0 < k < 1$.

Q 5) – On déduit de la propriété de Lipschitz que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |\ell_1 - x_n| \leqslant k^n|\ell_1 - x_0| \leqslant \sqrt{7}\cdot k^n$$

et de même que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |\ell_2 - y_n| \leqslant k^n|\ell_2 - y_0| \leqslant \sqrt{7+\sqrt{7}}\cdot k^n.$$

Comme $k \approx 1/4$, on en déduit que, pour $n = 6$, on aura $|\ell_1 - x_n| < 10^{-3}$ et $|\ell_2 - y_n| < 10^{-3}$.

REMARQUE.— Vérification faite avec le code suivant, l'objectif est presque atteint dès $n = 5$.

```python
def erreur(n):
    Lx, Ly = xy(n)
    x, y = Lx[-1], Ly[-1]
    return n, np.abs(2-x), np.abs(3-y)
```

Q 6) – Pas le temps.