Centrale MP - 976

Q 1) – Le calcul des u_n et des v_n est sans mystère.

```
import numpy as np

def u(n, x):
   un = x
   for i in range(n):
      un = un + un**2/2
   return un

def v(n, x):
   return np.log(u(n, x))/2**n

for n in range(11):
   print(u(n, 0.3), v(n, 0.3))
```

On se rend compte numériquement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend rapidement de grandes valeurs. Cela s'explique par la relation de récurrence, qui nous dit que cette suite est strictement croissante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2 > u_n.$$

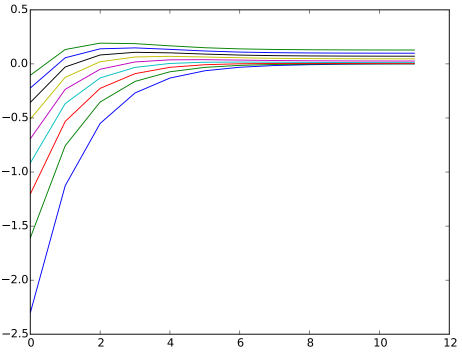
La seule solution réelle de $\ell = \ell + \ell^2$ est $\ell = 0$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (strictement positive et croissante) convergeait, ce serait donc vers 0, ce qui est absurde. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

❧ Difficile d'émettre une conjecture : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend si vite vers $+\infty$ qu'un débordement de capacité se produit avant $n = 20$ (pour $x = 0,3$), rendant impossible le calcul des v_n.

Cela dit, avec le code suivant, on a l'impression que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge assez vite, indépendamment du choix de x, et que sa limite est une fonction croissante de x.

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure()
X = np.arange(0.1, 1, 0.1)
for x in X:
   plt.plot([v(n,x) for n in range(12)])
```



❧ On a déjà démontré que, pour tout $x > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était strictement croissante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2 > u_n.$$

Allons plus loin en considérant $0 < x < y$. On a donc $u_0(x) < u_0(y)$. S'il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n(x) < u_n(y)$, alors

$$u_{n+1}(x) = f\big(u_n(x)\big) < f\big(u_n(y)\big) = u_{n+1}(y)$$

puisque la fonction $f = \big[t \mapsto t + t^2\big]$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On a ainsi établi une autre forme de monotonie : si $x < y$, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n(x) < u_n(y)$$

et par conséquent

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n(x) < v_n(y).$$

❧ D'après la relation de récurrence,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ell n\Big(1 + \frac{1}{u_n}\Big).$$

On a vu que, pour tout $x > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était strictement croissante et tendait vers $+\infty$. Par conséquent,

$$\ell n\Big(1 + \frac{1}{u_n}\Big) = o(1)$$

et donc

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{2^n}\Big).$$

La série géométrique $\sum {}^1\!/_{2^n}$ est absolument convergente, donc la série télescopique $\sum(v_{n+1} - v_n)$ est convergente. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente. En notant α, la limite de cette suite, on déduit du théorème de sommation des relations de comparaison que

$$\alpha - v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) \underset{n\to+\infty}{=} o\Big(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\Big) = o\Big(\frac{1}{2^n}\Big).$$

❧ On vient d'établir que

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \alpha + o\Big(\frac{1}{2^n}\Big).$$

On en déduit que

$$\ell n\, u_n \underset{n\to+\infty}{=} 2^n\Big[\alpha + o\Big(\frac{1}{2^n}\Big)\Big] = 2^n\alpha + o(1)$$

et donc, par continuité de exp, que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(2^n\alpha).$$

Q 2) – Par définition de $\alpha = \alpha(x)$,

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= v_0(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} v_{k+1}(x) - v_k(x)\\ &= \ell n\, x + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \ell n\Big(1 + \frac{1}{u_k(x)}\Big).\end{aligned}$$

❧ On a observé que

$$\forall\, x > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n(x) < v_n(y).$$

Par définition de $\alpha(x)$, on en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad \alpha(x) \leqslant \alpha(y).$$

La fonction α est donc croissante.

❧ On a remarqué que $u_k(x) \geqslant u_0(x) = x$ pour tout $x > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$\forall\, x > 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \ell n\Big(1 + \frac{1}{u_k(x)}\Big) \leqslant \ell n\Big(1 + \frac{1}{x}\Big).$$

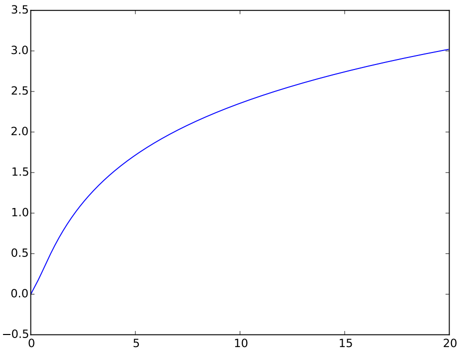
Cet encadrement prouve que la série de fonctions converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ et donc que la fonction α est continue comme somme de deux fonctions continues.

❧ Le tracé du graphe est sans mystère et l'étude de la convergence normale nous assure qu'il s'agit d'une bonne approximation de $\alpha(x)$.

```
import matplotlib.pyplot as plt

def S(x):
   s = np.log(x)
   for k in range(11):
      s += np.log(1 + 1/u(k, x))/(2**(k+1))
   return s

plt.figure()
X = np.arange(0.001, 20, 0.05)
plt.plot(X, [S(x) for x in X])
plt.xlim(-1, 20)
```



On a la confirmation visuelle de la croissance de la fonction α.