(a) Le polynôme $X^3 + X = X(X+1)$ est un polynôme annulateur. Les facteurs X et X^2+1 sont premiers entre eux, on peut donc appliquer le Théorème de décomposition des noyaux :

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + I)$$

et on sait que les deux sous-espaces sont stables par f (en tant que noyaux de polynômes en f).

❧ On notera f_0 et f_2, les endomorphismes de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(f^2+I)$ respectivement induits par restriction de f à ces deux sous-espaces vectoriels.

Par définition, f_0 est l'endomorphisme nul et f_2 admet X^2+1 pour polynôme annulateur.

❧ Si $\operatorname{Ker}(f^2+I) = \{0\}$, alors $f = \omega_E$: c'est impossible par hypothèse.

Si $\dim \operatorname{Ker}(f^2+I) = 1$, alors $\operatorname{Ker}(f^2+I)$ serait une droite stable par f et elle serait donc dirigée par un vecteur propre de f et donc de f_2.

Comme le polynôme X^2+1, annulateur de f_2, n'a pas de racine réelle, l'endomorphisme f_2 n'a pas de valeur propre et il n'existe donc pas de vecteur propre de f_2 dans le sous-espace $\operatorname{Ker}(f^2+I)$: contradiction !

Par conséquent, $\dim \operatorname{Ker}(f^2+I) \geqslant 2$ et donc

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker}(f^2+I) \leqslant 1.$$

❧ Comme $\dim E = 3$ est impaire, le degré du polynôme caractéristique de f est impair (égal à 3) et comme il s'agit d'un polynôme à coefficients réels, on en déduit qu'il admet au moins une racine réelle (Théorème des valeurs intermédiaires).

L'endomorphisme f admet donc au moins une valeur propre. On sait que toutes les valeurs propres de f sont des racines du polynôme annulateur $X(X^2+1)$, donc la seule valeur propre possible est 0.

Par conséquent, $\operatorname{Sp}(f) = \{0\}$ et $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 1$.

❧ En conclusion, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ et $\dim \operatorname{Ker}(f^2+I) = 2$.

▶ Choisissons un vecteur non nul $e_1 \in kerf$. Un tel choix est possible puisque $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ et ce vecteur est un vecteur directeur du sous-espace $\operatorname{Ker} f$.

Choisissons ensuite un vecteur non nul $e_2 \in \operatorname{Ker}(f^2+I)$. Un tel choix est possible puisque $\dim \operatorname{Ker}(f^2+I) = 2$. On a déjà démontré que ce vecteur e_2 n'était pas un vecteur propre de f, donc le vecteur $f(e_2)$ n'est pas colinéaire à e_2. Mais comme $\operatorname{Ker}(f^2+I)$ est stable par f, le vecteur $e_3 = f(e_2)$ appartient encore à $\operatorname{Ker}(f^2+I)$.

La famille (e_2, e_3) est donc une famille libre de deux vecteurs dans le plan $\operatorname{Ker}(f^2+I)$: c'est donc une base de $\operatorname{Ker}(f^2+I)$.

Par concaténation de bases, la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de E.

De plus, $f(e_1) = 0$ (car $e_1 \in \operatorname{Ker} f$), $f(e_2) = e_3$ (par construction de e_3) et

$$f(e_3) = f^2(e_2) = -e_2$$

car $e_2 \in \operatorname{Ker}(f^2+I)$ et, en restriction à ce sous-espace, l'application linéaire f^2+I est identiquement nulle.

La matrice de f relative à une telle base est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) En dimension n, on a encore

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2+I).$$

Nous allons démontrer par récurrence (sur la dimension) qu'il existe des plans vectoriels

$$P_1, P_2, \dots, P_r$$

tous stables par f et tels que

$$\operatorname{Ker}(f^2 + I) = \bigoplus_{j=1}^{r} P_j.$$

❧ Comme $f \neq \omega_E$, le sous-espace $F = \operatorname{Ker}(f^2 + I)$ n'est pas réduit au vecteur nul. Le raisonnement fait au **(a)** montre que F contient alors un plan

$$P_1 = \operatorname{Vect}(e_1, e_2).$$

❧ On suppose connue une famille de plans

$$P_1 = \operatorname{Vect}(e_1, e_2), \dots, P_k = \operatorname{Vect}(e_{2k-1}, e_{2k})$$

stables par f et tels que

$$F_k \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{j=1}^{k} P_j \subset F.$$

Si $F_k = F$, alors la propriété est établie pour $r = k$ et $\dim F = 2k$. Sinon, on peut choisir un vecteur

$$e_{2k+1} \in F \setminus F_k$$

et ce vecteur est nécessairement différent de 0_E.

❧ Comme F est stable par f, le vecteur

$$e_{2k+2} = f(e_{2k+1})$$

appartient encore à F. On a vu plus haut que le sous-espace F ne contenait aucun vecteur propre de f. Par conséquent, les vecteurs e_{2k+1} et $e_{2k+2} = f(e_{2k+1})$ ne sont pas colinéaires et le sous-espace

$$P_{k+1} = \operatorname{Vect}(e_{2k+1}, e_{2k+2})$$

est un plan contenu dans F.

❧ Ce plan P_{k+1} est stable par f : tout d'abord $f(e_{2k+1}) = e_{2k+2} \in P_{k+1}$ par construction et

$$f(e_{2k+2}) = f^2(e_{2k+1}) = -e_{2k+1} \in P_{k+1}$$

puisque $X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de f restreint à F.

❧ Considérons un vecteur $x \in P_{k+1} \cap F_k$. Alors $f(x) \in P_{k+1} \cap F_k$ (une intersection de sous-espaces vectoriels stables par f est encore stable par f) et comme il n'y a pas de vecteurs propres dans F (et donc dans F_k), alors

- ou bien $x = 0_E$,
- ou bien $\big(x, f(x)\big)$ est une famille libre de deux vecteurs dans le plan P_{k+1}.

Dans le second cas, on aurait une base de P_{k+1} constituée de vecteurs de F_k et par conséquent P_{k+1} serait contenu dans F_k, ce qui est faux par hypothèse.

Par conséquent, $x = 0_E$ et on a démontré que P_{k+1} et F_k étaient en somme directe.

❧ Comme F est un sous-espace de dimension finie, il est impossible de trouver une suite infinie de plans P_k tels que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad \bigoplus_{j=1}^{k} P_j \subset F.$$

Il existe donc un entier $r \geqslant 1$ (car $f \neq \omega$) tel que

$$F = \bigoplus_{j=1}^{r} P_j$$

et en particulier $\dim F = 2r$ est paire.

❧ Si $\dim E$ est paire, il est donc possible que $\dim \operatorname{Ker} f = 0$. C'est le cas en particulier pour les matrices diagonales par blocs de la forme

$$\operatorname{Diag}(B, B, \dots, B) \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

❧ Si $\dim E$ est impaire, en complétant la famille $(e_1, e_2, \dots, e_{2r-1}, e_{2r})$ avec des vecteurs de $\operatorname{Ker} f$ pour obtenir une base de E, on a démontré que f pouvait être représenté par la matrice diagonale par blocs.

$$\operatorname{Diag}(0_{n-2r}, B, \dots, B).$$