(a) On commence par un peu de trigonométrie pour y voir plus clair :

$$g(x) = f(x) + \sin x \int_0^x \cos t u(t) f(t)\, dt - \cos x \int_0^x \sin t u(t) f(t)\, dt.$$

Comme les fonctions

$$[t \mapsto \cos t u(t) f(t)] \quad \text{et} \quad [t \mapsto \sin t u(t) f(t)]$$

sont continues, on peut appliquer le Théorème fondamental et en déduire que g est de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$g'(x) = f'(x) + \cos x \int_0^x \cos t u(t) f(t)\, dt + \sin x \int_0^x \sin t u(t) f(t)\, dt$$

(en dérivant les deux produits, il apparaît deux termes qui se compensent exactement). Le Théorème fondamental, toujours lui, nous dit alors que g est en fait de classe $\mathscr{C}^2$ avec

$$g''(x) = f''(x) - \sin x \int_0^x \cos t u(t) f(t)\, dt + \cos x \int_0^x \sin t u(t) f(t)\, dt$$
$$+ (\cos^2 x + \sin^2 x) u(x) f(x).$$

Or, par hypothèse,

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad f''(x) = -f(x) - u(x) f(x)$$

donc

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad g''(x) = -g(x).$$

(b) Comme g est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ (équation du pendule harmonique), on en déduit que g est bornée : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \big|g(x)\big| \leqslant c.$$

Par définition de g et par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\forall\, x \geqslant 0, \quad \big|f(x)\big| &= \left|g(x) - \int_0^x \sin(x-t) u(t) f(t)\, dt\right| \\ &\leqslant \big|g(x)\big| + \int_0^x \big|\sin(x-t) u(t) f(t)\big|\, dt \\ &\leqslant c + \int_0^x \big|u(t) f(t)\big|\, dt.\end{aligned}$$

(c) Nous allons maintenant démontrer l'**inégalité de GRÖNWALL.**

❧ Pour tout $x \geqslant 0$, on pose

$$\Phi(x) = \left[c + \int_0^x |u(t)|\, |f(t)|\, dt\right] \cdot \exp\left(-\int_0^x |u(t)|\, dt\right).$$

D'après le Théorème fondamental (encore lui...), la fonction Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\Phi'(x) = |u(x)| \cdot \left[|f(x)| - c - \int_0^x |u(t)|\, |f(t)|\, dt\right] \cdot \exp\left(-\int_0^x |u(t)|\, dt\right).$$

Le premier et le dernier facteur sont évidemment positifs ; le second facteur est négatif (d'après ce qui précède) ; par conséquent, la fonction Φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et en particulier

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \Phi(x) \leqslant \Phi(0) = c.$$

On déduit alors de **(b)** que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \bigl|f(x)\bigr| \leqslant c \cdot \exp\left(\int_0^x |u(t)|\, dt\right).$$

Or la fonction u est supposée intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc la fonction croissante

$$\left[x \mapsto \int_0^x |u(t)|\, dt\right]$$

est bornée et comme exp est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f est bien bornée.

REMARQUE.— Cette démonstration est très astucieuse : comment peut-on penser à étudier cette fonction auxiliaire Φ si on ne connaît pas la démonstration ?

❧ Reprenons l'encadrement du **(b)** et multiplions par $|u(x)|$ pour obtenir une inéquation différentielle :

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad |u(x)||f(x)| \leqslant c|u(x)| + |u(x)| \int_0^x |u(t)||f(t)|\, dt.$$

Cette relation nous suggère d'étudier la fonction

$$\Psi = \left[x \mapsto \int_0^x |u(t)||f(t)|\, dt\right],$$

qui est de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \Psi'(x) = |u(x)||f(x)|.$$

Par conséquent,

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \Psi'(x) - |u(x)| \cdot \Psi(x) = m(x)$$

où m est une fonction telle que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad m(x) \leqslant c \cdot |u(x)|.$$

REMARQUE.— C'est assez astucieux, j'en conviens ! Une inéquation différentielle est en fait une équation différentielle pour laquelle le second membre n'est pas vraiment connu : on connaît seulement un majorant du second membre...

On sait résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre : il existe une fonction dérivable K telle que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad \Psi(x) = K(x) \cdot \exp V(x)$$

où V est une primitive de $|u|$, par exemple :

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad V(x) = \int_0^x |u(t)|\, dt.$$

Comme $\Psi(0) = 0$, on a $K(0) = 0$ et la méthode de variation de la constante nous dit que

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad K'(x) = m(x) \cdot \exp\bigl[-V(x)\bigr].$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\forall\, x \geqslant 0, \quad \Psi(x) &= \exp V(x) \cdot \int_0^x \exp\bigl[-V(t)\bigr] \cdot m(t)\, dt \\ &\leqslant \exp V(x) \cdot \int_0^x \exp\bigl[-V(t)\bigr] \cdot c \cdot |u(t)|\, dt.\end{aligned}$$

Comme la fonction u est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la primitive V est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et le produit $\exp[-V(t)] \cdot |u(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (produit d'une fonction bornée par une fonction intégrable).

On en déduit que Ψ est majorée et d'après **(b)**

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad |f(x)| \leqslant c + \Psi(x)$$

donc la fonction f est bien bornée sur $\mathbb{R}_+$.