❧ Soit $E \subset \mathbb{R}$, le **support** de la loi de X, c'est-à-dire l'ensemble (fini ou dénombrable, puisque E est une variable aléatoire discrète) des réels x pour lesquels
$$\mathbf{P}(X = x) > 0.$$

REMARQUE.— Le support de la loi de X est l'ensemble des *valeurs qui sont vraiment prises* par la variable X. On peut considérer une variable de loi géométrique comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ mais son support est $\mathbb{N}^*$. De même, on peut considérer une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ mais son support est $[\![0, n]\!]$.

❧ Pour tout $\omega \in \Omega$, on a
$$Y(\omega) = f\big(X(\omega)\big)$$
et par conséquent
$$\forall\, x \in E, \quad X(\omega) = x \implies Y(\omega) = f(x).$$
Autrement dit,
$$\forall\, x \in E, \quad [X = x] \subset [Y = f(x)]$$
et donc
$$\forall\, x \in E, \quad [X = x] \cap [Y = f(x)] = [X = x].$$

❧ On en déduit que
$$\forall\, x \in E, \quad \mathbf{P}\big(X = x, Y = f(x)\big) = \mathbf{P}(X = x)$$
et par hypothèse d'indépendance
$$\forall\, x \in E, \quad \mathbf{P}(X = x)\,\mathbf{P}\big(Y = f(x)\big) = \mathbf{P}(X = x).$$
Or $\mathbf{P}(X = x) > 0$ pour tout $x \in E$ (par définition même du support), donc
$$\forall\, x \in E, \quad \mathbf{P}\big(Y = f(x)\big) = 1.$$

REMARQUE.— Si x n'est pas dans le support de la loi de X, alors on ne peut pas simplifier par $\mathbf{P}(X = x)$ (division par zéro).

❧ Cette propriété signifie deux choses :
- la variable aléatoire Y n'est ni variable, ni aléatoire : elle est presque sûrement constante (loi de Dirac) ;
- la fonction f prend la même valeur (= la valeur de Y) en chaque point du support de la loi de X.

REMARQUE.— Cette conclusion n'est pas extraordinaire car l'hypothèse de départ était paradoxale : il est tout de même étonnant de supposer que X et Y soient *indépendantes* alors que $Y = f(X)$ est *déterminée* par X.