❧ Supposons que u admette une valeur propre (réelle). Dans ce cas, il existerait aussi un vecteur propre x (non nul...) et la droite $\mathbb{R} \cdot x$ serait stable par u.

D'après l'énoncé, seuls $\{0\}$ et E sont stables par u avec $\dim E \geqslant 2$.

Par conséquent, le spectre (réel) de u est vide et u n'admet aucun vecteur propre.

❧ Considérons le polynôme minimal de u et factorisons-le en produit de polynômes irréductibles unitaires :

$$P = \prod_{k=1}^{r} P_k^{m_k}.$$

Les facteurs P_k étant des polynômes irréductibles deux à deux distincts, les facteurs $P_k^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux. D'après le Théorème de décomposition des noyaux,

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker} P_k^{m_k}(u).$$

Pour tout indice $1 \leqslant k \leqslant r$, le sous-espace $\operatorname{Ker} P_k(u)$ est stable par u, distinct de $\{0\}$ (puisque P_k est un diviseur du polynôme minimal) et

$$\operatorname{Ker} P_k(u) \subset \operatorname{Ker} P_k^{m_k}(u)$$

puisque $m_k \geqslant 1$.

❧ D'après l'hypothèse de l'énoncé,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \quad \operatorname{Ker} P_k(u) = E.$$

Mais comme les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} P_k^{m_k}(u)$ sont en somme directe, on doit en conclure que $r = 1$ et que $\operatorname{Ker} P_1(u) = E$.

Le polynôme minimal de u est donc irréductible : $P = P_1$.

❧ Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont d'une part les polynômes de degré 1 et d'autre part les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Les racines (réelles) du polynôme minimal sont les valeurs propres de u et on a constaté pour commencer que u n'avait pas de valeurs propres. Par conséquent, son polynôme minimal est un irréductible de degré 2.

❧ Notons $X^2 + aX + b$, le polynôme minimal de u et considérons un vecteur $x_0 \neq 0_E$.

Si les vecteurs x_0 et $u(x_0)$ étaient colinéaires, alors x_0 serait un vecteur propre de u : il n'en existe pas, on l'a déjà vu ! Par conséquent, la famille $\big(x_0, u(x_0)\big)$ est libre et le sous-espace

$$F = \operatorname{Vect}(x_0, u(x_0))$$

est un plan.

Comme $u^2 + au + b\,I = \omega_E$, alors

$$u\big(u(x_0)\big) = -b \cdot x_0 - a \cdot u(x_0) \in F$$

et par suite, le plan F est stable par u.

Or on a supposé que E était le seul sous-espace distinct de $\{0\}$ qui soit stable par u. Donc $E = F$ est bien un plan vectoriel.