(a) On sait que $f(0) = 0$ et que f est continue en 0. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [0, \alpha], \quad \big|f(t)\big| = \big|f(t) - 0\big| \leqslant \varepsilon.$$

Considérons un entier n assez grand pour que $0 < {}^1\!/_n \leqslant \alpha$. Pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$0 < {}^{k^2}\!/_n \leqslant {}^1\!/_n \leqslant \alpha$$

et par conséquent

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \left|f\Big(\frac{k}{n^2}\Big)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Par inégalité triangulaire,

$$|u_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\varepsilon = \frac{n(n+1)}{2n^2} \cdot \varepsilon.$$

Comme $n(n+1)/(2n^2)$ tend vers ${}^1\!/_2$, cette quantité est inférieure à 1 pour tout entier n assez grand.

En résumé, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad |u_n| = |u_n - 0| \leqslant \varepsilon.$$

REMARQUE.— Je précise : on doit choisir $n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand pour que

$$\frac{1}{n} \leqslant \alpha \qquad \text{et que} \qquad \frac{n+1}{2n} \leqslant 1.$$

(b) Si la fonction f est dérivable en 0, alors

$$f(t) \underset{t\to 0}{=} f(0) + tf'(0) + o(t) = tf'(0) + t \cdot \theta(t)$$

où θ est une fonction de limite nulle en $t = 0$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme plus haut, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, 0 < t \leqslant \alpha, \quad \big|\theta(t)\big| \leqslant \varepsilon.$$

On choisit encore n assez grand pour que $0 < {}^1\!/_n \leqslant \alpha$, de telle sorte que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \left|\theta\Big(\frac{k}{n^2}\Big)\right| \leqslant \varepsilon$$

puisque

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad 0 < \frac{k}{n^2} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \alpha.$$

On a donc

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \left|f\Big(\frac{k}{n^2}\Big) - \frac{k}{n^2}f'(0)\right| \leqslant \frac{k}{n^2} \cdot \varepsilon.$$

D'après l'Inégalité triangulaire,

$$\left|u_n - f'(0)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^4}\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^4}.$$

Or on sait que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^3}{3}$$

donc, pour tout entier n assez grand,

$$\left| nu_n - \frac{f'(0)}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right| \leqslant \varepsilon$$

(une suite qui tend vers $1/3$ est inférieure à 1 à partir d'un certain rang).

On vient ainsi de démontrer que

$$nu_n = \frac{f'(0)}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} + o(1) = \frac{f'(0)}{3} + o(1)$$

et donc que

$$u_n = \frac{f'(0)}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Deux manières de résumer, selon la fonction f :

– Si $f'(0) \neq 0$, alors

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{f'(0)}{3n}$$

– mais si $f'(0) = 0$, alors

$$u_n \underset{n \to +\infty}{=} o(1/n).$$