Centrale MP - 994

(a) On commence par définir la matrice A.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as alg

A = np.zeros( (5,5) )
for i in range(4):
   A[i,i+1] = 1
for i in range(5):
   A[4,i] = 1/5
```

❧ Il s'agit d'une matrice compagnon, donc on sait à quoi s'attendre en calculant le polynôme caractéristique. On n'est d'ailleurs pas obligé de le calculer à la main...

```
chi_A = np.poly(A)
```

$$\chi_A = X^5 - \frac{X^4 + X^3 + X^2 + X + 1}{5}$$

Attention ! Contrairement au module `Polynomial`, les coefficients du polynôme sont ici donnés selon les puissances *décroissantes*. Comme le polynôme caractéristique est unitaire, le premier coefficient est donc toujours égal à 1.

❧ Je ne vois pas vraiment comment factoriser ce polynôme à la main (même si j'ai remarqué qu'il admettait 1 pour racine).

```
Sp_A = alg.eigvals(A)
```

On constate que 1 est la seule valeur propre réelle de A, les autres sont complexes et deux à deux conjuguées.

```
mod_vp = [ np.abs(lbd) for lbd in Sp ]
```

La matrice A n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ mais elle est bien diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (puisque $A \in \mathfrak{M}_5(\mathbb{C})$ possède 5 valeurs propres distinctes).

On constate par ailleurs que les modules des valeurs propres complexes sont *strictement* inférieurs à 1.

(b) On peut calculer les u_n de manière élémentaire en réécrivant la relation de récurrence sous une forme plus simple (= directe à coder).

$$\forall\, i \geqslant 5, \quad u_i = \frac{u_{i-5} + u_{i-4} + u_{i-3} + u_{i-2} + u_{i-1}}{5}$$

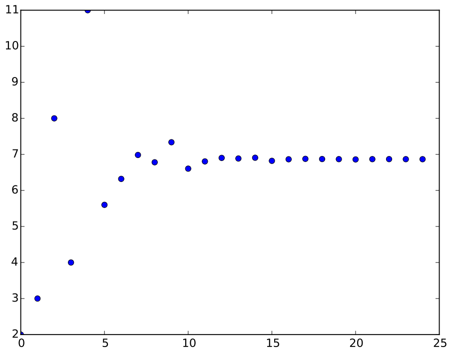
```
def u(n):
   L_u = [ 2, 3, 8, 4, 11 ]
   for i in range(5, n+1):
      u_i = 0
      for k in range(i-5, i):
         u_i += L_u[k]
      L_u.append(u_i/5)
   return L_u
```

REMARQUE.— Les pythoniens fanatiques préféreront utiliser les tranches et en profiteront pour rendre le code exact pour $n \leqslant 4$ (ce qui est un signe avéré de maniaquerie). On n'attend pas cela des candidats...

```
def u(n):
    L_u = [ 2, 3, 8, 4, 11 ]
    for i in range(5, n+1):
        u_i = 0.2*sum(L_u[-5:])
        L_u.append(u_i)
    return L_u[:n+1]
```

En traçant l'évolution de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on devine qu'elle converge (vers une limite légèrement inférieure à 6).

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(u(24), 'o')
```



❧ La relation de récurrence peut aussi s'écrire

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec} \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \\ u_{n+4} \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

❧ On a constaté plus haut qu'il existait une matrice $P \in GL_5(\mathbb{C})$ telle que

$$\Delta = P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(1, \alpha, \overline{\alpha}, \beta, \overline{\beta})$$

avec $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$.

On en déduit que

$$P^{-1}A^nP = (P^{-1}AP)^n = \mathrm{Diag}(1, \alpha^n, \overline{\alpha}^n, \beta^n, \overline{\beta}^n)$$

tend vers $\mathrm{Diag}(1, 0, 0, 0, 0)$, qui est évidemment une matrice de projection (de rang 1).

Comme l'application $\left[M \mapsto PMP^{-1}\right]$ est continue (linéaire sur un espace de dimension finie), on déduit du Théorème de composition des limites que

$$\Pi = \lim_{n\to+\infty} A^n = P\,\mathrm{Diag}(1, 0, 0, 0, 0)P^{-1}$$

qui est aussi une matrice de projection.

Comme

$$\chi_A = \frac{(X-1)(5X^4 + 4X^3 + 3X^2 + 2X + 1)}{5},$$

on déduit du théorème de décomposition des noyaux (et du Théorème de Cayley-Hamilton) que

$$\mathbb{R}^5 = \mathrm{Ker}(A - I_5) \oplus \mathrm{Ker}(5A^4 + 4A^3 + 3A^2 + 2A + I_5)$$

et on conjecture que Π est la projection sur $\mathrm{Ker}(A - I_5)$ parallèlement au sous-espace $\mathrm{Ker}(5A^4 + 4A^3 + 3A^2 + 2A + I_5)$. (La formule du changement de base nous assure que Π est une projection sur la droite propre associée à la valeur propre 1.)

Laissons la théorie de côté et calculons Π.

```
P = alg.eig(A)[1]
proj_diag = np.zeros( (5,5) )
proj_diag[0,0] = 1
proj = np.dot(np.dot(P, proj_diag), alg.inv(P))
```

Pour y voir plus clair, on élimine les parties imaginaires (qui ne sont que des erreurs d'arrondi : telle qu'on l'a définie, la matrice Π est réelle) et après quelques tâtonnements, la commande

```
(proj*15).real
```

nous assure que

$$\Pi = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}}{15} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit donc de la projection sur la droite

$$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}(A - I_5)$$

parallèlement à l'hyperplan d'équation

$$[x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0].$$

La confirmation est facile à obtenir.

```
B = np.eye(5)
for i in range(1, 5):
   B += (i+1)*alg.matrix_power(A, i)
```

On constate que $B = 15\Pi$.

❧ En passant à la limite dans la relation $A^{n+1} = A^n.A$, on obtient $\Pi = \Pi.A$ et donc $A^T\Pi^T = \Pi^T$. Chaque colonne de Π^T nous donne donc un vecteur X tel que $A^TX = X$ et, d'après ce qui précède, chaque colonne de Π^T est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$