❧ On modélise l'expérience aléatoire par une famille $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires complexes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, qu'on suppose indépendantes et de même loi :

$$\mathbf{P}\big(Z = 1\big) = \mathbf{P}\big(Z = -1\big) = \mathbf{P}\big(Z = i\big) = \mathbf{P}\big(Z = -i\big) = \frac{1}{4}$$

qui représentent les *déplacements* successifs de la puce.

❧ Les *positions* occupées par la puce au fil du temps sont les variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+1} = S_n + Z_{n+1}.$$

Les variables aléatoires X_n et Y_n introduites par l'énoncé sont alors définies par

$$X_n = \mathfrak{Re}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{Re}(Z_k) \quad \text{et} \quad Y_n = \mathfrak{Im}(S_n).$$

Comme les variables aléatoires Z_k sont indépendantes et de même loi, les variables aléatoires $\mathfrak{Re}(Z_k)$ sont aussi indépendantes (lemme des coalitions) et de même loi :

$$\mathbf{P}\big(\mathfrak{Re}(Z) = 1\big) = \mathbf{P}\big(\mathfrak{Re}(Z) = -1\big) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}\big(\mathfrak{Re}(Z) = 0\big) = \frac{1}{2}.$$

❧ On en déduit que

$$\mathbf{E}\big(\mathfrak{Re}(Z)\big) = 0$$

et donc que (Koenig-Huyghens)

$$\mathbf{V}\big(\mathfrak{Re}(Z)\big) = \mathbf{E}\big(\mathfrak{Re}(Z)^2\big) = \frac{1}{2}.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\big(\mathfrak{Re}(Z_k)\big) = 0.$$

Par indépendance des variables aléatoires,

$$\mathbf{V}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}\big(\mathfrak{Re}(Z_k)\big) = \frac{n}{2}$$

et, à nouveau par la formule de Koenig-Huyghens,

$$\mathbf{E}(X_n^2) = \frac{n}{2}.$$