

I

Barycentres et parties convexes

1. Soit E , un espace vectoriel.

1.1 \Leftarrow On considère un **système pondéré**, c'est-à-dire une famille finie de couples $(A_k, \alpha_k) \in E \times \mathbb{K}$ dont le **poids total** n'est pas nul :

$$\alpha = \sum_{k=1}^n \alpha_k \neq 0.$$

1.2 \Leftarrow Le **barycentre** du système pondéré

$$[(A_k, \alpha_k)]_{1 \leq k \leq n}$$

de poids total α est le point $G \in E$ défini par

$$G = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot A_k.$$

1.3 Pour tout point $M \in E$,

$$\alpha \cdot MG = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot MA_k$$

et en particulier,

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot GA_k = \mathbf{0}_E.$$

1.4 **Système pondéré normalisé**

Si le poids total du système pondéré $[(A_k, \alpha_k)]_{1 \leq k \leq n}$ est égal à 1, alors le barycentre $G \in E$ de ce système est caractérisé par

$$G = \sum_{k=1}^n \alpha_k A_k.$$

1.5 \Leftarrow Un point G de E est une **combinaison convexe** des points $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ de E lorsqu'il existe une famille de réels $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$ tels que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \alpha_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1 \quad \text{et} \quad G = \sum_{k=1}^n \alpha_k A_k.$$

1.6 \Leftarrow L'**isobarycentre** des points $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ de E est le barycentre du système pondéré $[(A_k, 1)]_{1 \leq k \leq n}$:

$$G = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_k.$$

Associativité du barycentre

2. \rightarrow Soit $(A_0, \alpha_0), \dots, (A_n, \alpha_n)$, un système pondéré dont le poids total n'est pas nul.

Pour un entier $1 \leq m \leq n$ tel que les poids partiels

$$p_1 = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \quad \text{et} \quad p_2 = \sum_{k=m}^n \alpha_k$$

soient tous les deux non nuls, on note G_1 et G_2 , les barycentres des systèmes $[(A_k, \alpha_k)]_{0 \leq k < m}$ et $[(A_k, \alpha_k)]_{m \leq k \leq n}$.

Alors le barycentre G du système pondéré $[(A_k, \alpha_k)]_{0 \leq k \leq n}$ est aussi le barycentre du système pondéré $(G_1, p_1), (G_2, p_2)$.

$$G = \frac{p_1}{p_1 + p_2} G_1 + \frac{p_2}{p_1 + p_2} G_2.$$

Exemples géométriques simples

3. Soient A et B , deux points distincts.

3.1 La droite (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B .

3.2 \Leftarrow Le **segment** $[A, B]$ est l'ensemble des combinaisons convexes de A et B :

$$[A, B] = \{(1-t)A + tB, t \in [0, 1]\}.$$

3.3 L'isobarycentre de A et B est le milieu du segment $[A, B]$.

4. \Leftarrow Soient A, B et C , trois points. Le **triangle** ABC est l'ensemble des combinaisons convexes de A, B et C .

Parties convexes

5. \Leftarrow Une partie $K \subset E$ est **convexe** lorsque

$$\forall (A, B) \in K^2, \quad [A, B] \subset K.$$

6. L'intersection de deux parties convexes de E est une partie convexe de E .

7.1 \rightarrow Une partie $K \subset E$ est convexe si, et seulement si, toute combinaison convexe de points de K appartient à K . \rightarrow [41]

7.2 Si K est convexe, alors, quels que soient les points A, B et C dans K , le triangle ABC est contenu dans K .

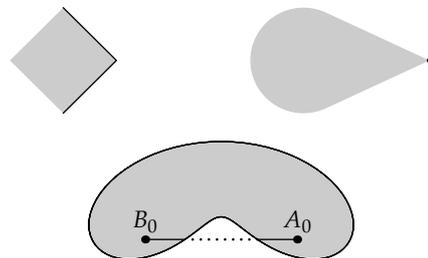
8. Exemples et contre-exemple

8.1 Les intervalles sont les parties convexes de \mathbb{R} .

8.2 Tout triangle est convexe.

8.3 Tout sous-espace vectoriel de E est convexe.

8.4



Entraînement

9. **Questions pour réfléchir**

1. Quel que soit le scalaire $\lambda \neq 0$, les systèmes pondérés

$$[(A_k, \alpha_k)]_{1 \leq k \leq n} \quad \text{et} \quad [(A_k, \lambda \alpha_k)]_{1 \leq k \leq n}$$

ont même barycentre.

2. Soit F , un sous-espace de E qui contient A_1, \dots, A_n . Tout barycentre de A_1, \dots, A_n appartient à F .

3. L'isobarycentre des points $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une combinaison convexe des points A_1, \dots, A_n .

4. Si les poids $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont strictement positifs, alors le barycentre du système pondéré $[(A_k, \alpha_k)]_{1 \leq k \leq n}$ est une combinaison convexe des points $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$.

5. On considère une série statistique de N valeurs.

5.a Dans quel cas la moyenne n'est-elle pas modifiée lorsqu'on ajoute une valeur à cette série ?

5.b Dans quel cas la moyenne n'est-elle pas modifiée lorsqu'on ajoute deux valeurs à cette série ?

6. En fin de seconde, 5% des filles et 7% des garçons redoublent. Que dire du taux de redoublement ?

7. Dans l'entreprise A, le salaire moyen des 180 ouvriers est de 1,15 k€ et celui des 20 cadres est de 2,2 k€. Dans l'entreprise B, le salaire moyen des 100 ouvriers est de 1,1 k€ et celui des 100 cadres est de 2,07 k€.

Le salaire moyen des ouvriers est donc *plus* élevé dans l'entreprise A que dans l'entreprise B et le salaire moyen des cadres est *plus* élevé dans l'entreprise A que dans l'entreprise B.

Cependant, le salaire moyen global est *moins* élevé dans l'entreprise A que dans l'entreprise B. Expliquer.

8. Plus de la moitié des professeurs d'un lycée ont au moins 45 ans. Que dire de l'âge moyen des professeurs de cet établissement ?

9. Soient $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n}$, une famille de réels strictement positifs. On note

$$\forall 0 \leq m \leq n, \quad \sigma_m = \sum_{k=0}^m \alpha_k.$$

On pose alors $G_0 = A_0$ et

$$\forall 1 \leq m \leq n, \quad G_m = \frac{\sigma_{m-1}}{\sigma_m} G_{m-1} + \frac{\alpha_m}{\sigma_m} A_m.$$

Alors G_n est le barycentre du système pondéré $[(A_k, \alpha_k)]_{0 \leq k \leq n}$.

10. L'union de deux parties convexes de E est-elle une partie convexe de E ?

10. Barycentre et applications linéaires

Soit G , le barycentre du système pondéré $[(A_k, \alpha_k)]_{1 \leq k \leq n}$.

Si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire, alors $f(G)$ est le barycentre du système pondéré $[(f(A_k), \alpha_k)]_{1 \leq k \leq n}$.

II

Fonctions convexes

11.1 \Leftarrow Une application f définie sur un intervalle I , à valeurs réelles est **convexe** lorsque, quels que soient x et y dans I ,

$$\forall \lambda \in [0, 1], \quad f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

11.2 \Leftarrow Une application f est **concave** lorsque $-f$ est convexe.

11.3 Soient f , une application convexe de l'intervalle I dans \mathbb{R} et $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, une famille de points de I .

Quels que soient les réels positifs $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ dont la somme est égale à 1,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i)$$

et en particulier

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i).$$

II.1 Caractérisations géométriques

12. Cordes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On note A et B , les points du graphe de f d'abscisses respectives $x \in I$ et $y \in I$ avec $x < y$.

12.1 L'**arc** (A, B) est la partie du graphe de f qui correspond aux abscisses comprises entre x et y :

$$(A, B) = \{(z, f(z)), x \leq z \leq y\}.$$

12.2 Le **segment**

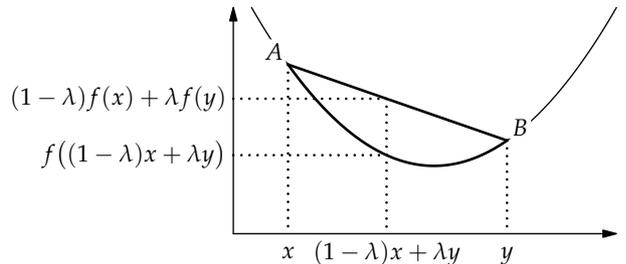
$$[A, B] = \{(1-t)A + tB, t \in [0, 1]\}$$

est la **corde interceptée** par l'arc (A, B) .

12.3 La corde $[A, B]$ est le graphe de la fonction affine φ définie par

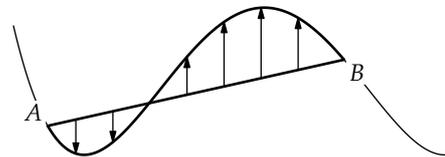
$$\forall z \in [x, y], \quad \varphi(z) = \frac{y-z}{y-x} f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y).$$

12.4 \rightarrow Une fonction est convexe si, et seulement si, tout arc de son graphe est situé au-dessous de la corde qu'il intercepte. \rightarrow [26]



12.5 \rightarrow Une fonction est concave si, et seulement si, tout arc de son graphe est situé au-dessus de la corde qu'il intercepte.

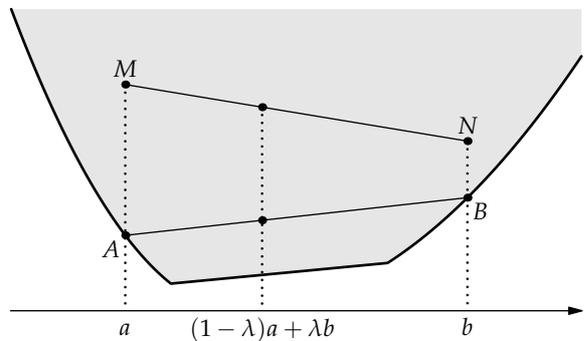
12.6 Exemple de fonction qui n'est ni convexe, ni concave.



13. Épigraphes

13.1 \Leftarrow Soit f , une application de I dans \mathbb{R} . L'**épigraphe** de f est l'ensemble des points du plan situés au-dessus du graphe de f , soit :

$$E_f = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}.$$



13.2 \rightarrow Une fonction de I dans \mathbb{R} est convexe si, et seulement si, son épigraphe est une partie convexe de \mathbb{R}^2 .

14. Sécantes

14.1 Soient x, u, y , trois réels tels que $x < u < y$. Alors u est une combinaison convexe de x et y :

$$u = \frac{y-u}{y-x} x + \frac{u-x}{y-x} y.$$

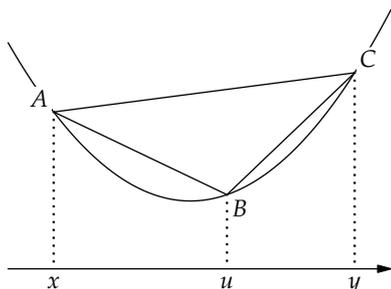
14.2 \rightarrow Soit f , une application convexe de l'intervalle I dans \mathbb{R} . Quels que soient les points x, u, y de I tels que $x < u < y$,

$$\frac{f(u) - f(x)}{u - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(u)}{y - u}.$$

14.3 → Soit f , une application de I dans \mathbb{R} telle que, quels que soient les points x, u, y de I tels que $x < u < y$,

$$\frac{f(u) - f(x)}{u - x} \leq \frac{f(y) - f(u)}{y - u}.$$

Alors la fonction f est convexe sur I .

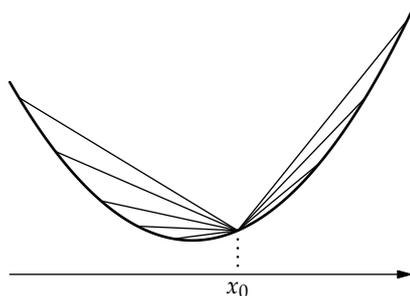


II.2 Caractérisations analytiques

15. → Une application f de l'intervalle I dans \mathbb{R} est convexe sur I si, et seulement si, pour tout point $x_0 \in I$, l'application τ_{x_0} définie par

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, \quad \tau_{x_0}(x) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

est croissante.



Fonctions dérivables

16. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, une application convexe et dérivable. Alors

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$$

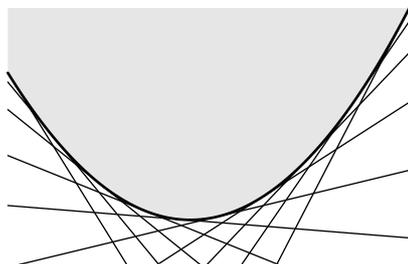
quels que soient $x < y$ dans I .

17. → Soient $I \subset \mathbb{R}$, un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, une application dérivable. Les propositions suivantes sont équivalentes.

17.1 La fonction f est convexe.

17.2 La dérivée f' est croissante.

17.3 Le graphe de f est en tout point situé au-dessus de ses tangentes.



18. → Fonctions deux fois dérivables

Soit f , une application deux fois dérivable de l'intervalle I dans \mathbb{R} .

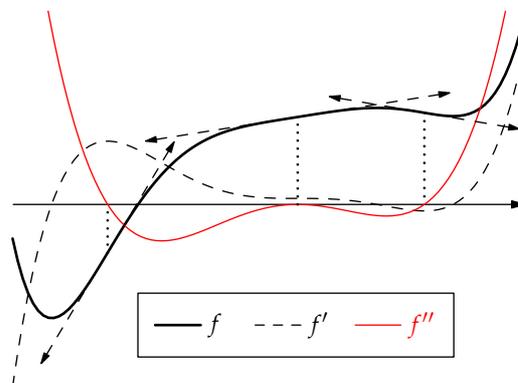
18.1 La fonction f est convexe sur I si, et seulement si, sa dérivée seconde f'' est positive sur I .

18.2 La fonction f est concave sur I si, et seulement si, sa dérivée seconde f'' est négative sur I .

19. Soit f , une application deux fois dérivable sur I .

19.1 Le graphe de f présente un point d'inflexion en $x_0 \in I$ lorsque $f''(x_0) = 0$.

19.2 Exemples de points d'inflexion



19.3 On parle de point d'inflexion géométrique lorsque $f''(x)$ n'est pas du même signe au voisinage gauche de x_0 et au voisinage droit de x_0 .

19.4 Si le graphe de f présente un point d'inflexion géométrique en x_0 , alors le graphe de f traverse la tangente en ce point.

II.3 Exemples usuels

20. Les fonctions affines $[x \mapsto ax + b]$ sont à la fois convexes et concaves sur \mathbb{R} .

21. La fonction polynomiale du second degré définie par

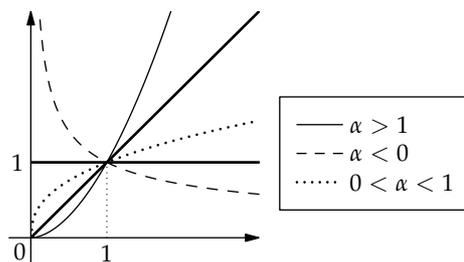
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

est convexe pour $a > 0$ et concave pour $a < 0$.

22. La fonction définie par

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x^\alpha$$

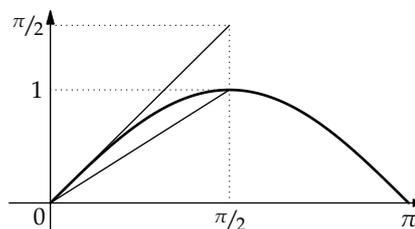
est convexe sur $]0, +\infty[$ pour $\alpha \leq 0$ et $\alpha \geq 1$; elle est concave pour $0 < \alpha < 1$.



23. Fonctions trigonométriques

23.1 La fonction sin est concave sur $[0, \pi]$.

$$\forall 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$$

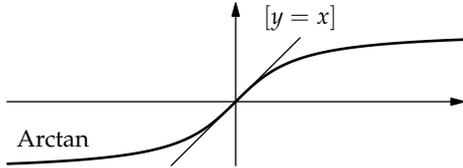


- 23.2 La fonction cos est concave sur $[-\pi/2, \pi/2]$.
 23.3 La fonction tan est concave sur $]-\pi/2, 0]$ et convexe sur $[0, \pi/2[$.

$$\forall 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad \tan x > x$$

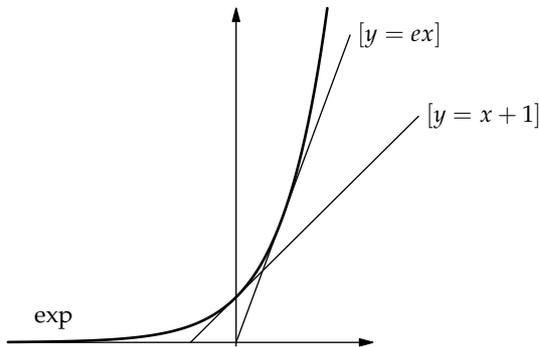
Sa réciproque, Arctan, est convexe sur \mathbb{R}_- et concave sur \mathbb{R}_+ .

$$\forall x > 0, \quad 0 < \text{Arctan } x < x$$



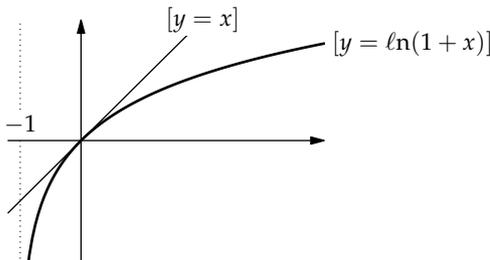
- 24.1 La fonction exp est convexe sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq \max\{1 + x, ex\}.$$



- 24.2 La fonction ln est concave sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x > -1, \quad \ln(1 + x) \leq x.$$



- 24.3 La fonction ch est convexe sur \mathbb{R} .
 24.4 La fonction sh est concave sur \mathbb{R}_- et convexe sur \mathbb{R}_+ .

Entraînement

25. Questions pour réfléchir

1. L'application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si, pour tout x et tout y de I ,

$$\forall 0 < \lambda < 1, \quad f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

- Si une fonction à valeurs réelles est continue sur $[a, b]$ et convexe sur $]a, b[$, alors elle est convexe sur $[a, b]$.
- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Si $f''(x_0) > 0$, alors il existe un voisinage $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ de x_0 sur lequel la fonction f est convexe.
- Si une fonction convexe croissante (resp. décroissante) réalise une bijection de I sur J , alors sa bijection réciproque est concave (resp. convexe) sur J .
- Soit f , une fonction convexe de classe \mathcal{C}^2 dont la dérivée ne s'annule pas sur l'intervalle I . Elle réalise une bijection de I sur un intervalle J et la bijection réciproque g est de classe \mathcal{C}^2 sur J . Expression de la dérivée seconde de g ?

26. Soient $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$, deux points du graphe d'une fonction convexe f . On suppose que $a < b$.
 26.1 Si $f(a) < f(b)$, alors f est croissante sur $[b, +\infty[$.
 26.2 Pour $x < a$ et pour $x > b$, le point $M = (x, f(x))$ du graphe de f est situé au-dessus de la droite (AB) :

$$(b - a)f(x) \geq x(f(b) - f(a)) + bf(a) - af(b).$$

- 26.3 Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et bornée, alors f est constante.

27. Dérivabilité et droites d'appui

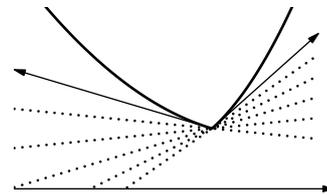
Soit f , une fonction convexe sur un intervalle ouvert I .

27.1 La fonction f est dérivable à gauche et dérivable à droite en chaque point de I et

$$\forall x \in I, \quad f'_g(x) \leq f'_d(x).$$

Les deux fonctions f'_g et f'_d sont croissantes sur I . →[39]

27.2 Soit f , une fonction convexe sur l'intervalle I . On appelle **droite d'appui** toute droite passant par un point du graphe de f et située sous le graphe de f .



- 27.3 La droite représentée par

$$y = a(x - x_0) + f(x_0)$$

est une droite d'appui si, et seulement si, $f'_g(x_0) \leq a \leq f'_d(x_0)$.

III

Inégalités de convexité

28. Inégalité triangulaire

L'inégalité triangulaire

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |x + y| \leq |x| + |y|$$

traduit la convexité de la fonction $[x \mapsto |x|]$.

29. Inégalité de Schwarz

$$\forall (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n, \quad \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \left[n \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \right]^{1/2}$$

30. Inégalité arithmético-géométrique

Par concavité de ln,

$$\forall x, y > 0, \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}.$$

Il y a égalité si, et seulement si, $x = y$. →[35]

31. Extrema d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

Soit f , une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur l'intervalle I , à valeurs réelles. On suppose qu'il existe un réel x_0 tel que $f'(x_0) = 0$ (**point critique**).

- 31.1 Si $f''(x_0) > 0$, alors f atteint un minimum local en x_0 .
 31.2 Si $f''(x_0) < 0$, alors f atteint un maximum local en x_0 .

32. La convexité peut servir à étudier les extrema d'une fonction numériques de plusieurs variables.

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

33. Exemples et contre-exemples

1. Exemple de fonction convexe sur \mathbb{R} et :
 - 1.a positive sur \mathbb{R} ;
 - 1.b négative sur \mathbb{R} ;
 - 1.c croissante sur \mathbb{R} ;
 - 1.d décroissante sur \mathbb{R} ;
 - 1.e non minorée sur \mathbb{R} ;
 - 1.f bornée sur \mathbb{R} ;
 - 1.g bijective de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
2. Exemple de fonction convexe sur $[0, 1]$:
 - 2.a qui n'est pas dérivable ;
 - 2.b qui n'est pas continue. →[39]
3. Exemple de fonction convexe sur \mathbb{R} , qui tend vers $-\infty$ au voisinage de $-\infty$, qui tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$ et dont le graphe admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.
4. Exemple de fonction convexe et monotone sur \mathbb{R} dont le graphe admet une branche parabolique en $-\infty$ et une branche parabolique en $+\infty$.

34. Questions pour réfléchir

1. Comparer les notions de **barycentre** et de **moyenne**.
2. Généraliser le théorème [2].
3. Soient A, B et C , trois points non alignés du plan \mathcal{P} .
- 3.a Le demi-plan limité par la droite (AB) et contenant le point C est l'ensemble des barycentres de la forme

$$(1 - \gamma)(\alpha A + (1 - \alpha)B) + \gamma C$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}_+$.

- 3.b Le triangle ABC est l'intersection de trois demi-plans.
4. Tout sous-espace affine de E est convexe.
5. Soit $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq N}$, une subdivision du segment $[a, b]$. Si la restriction de f à chaque sous-segment $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ est une fonction convexe, la fonction f est-elle convexe sur $[a, b]$?
6. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue. On suppose que

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i)$$

pour toute famille finie $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ de points de I (l'entier n , supérieur à 2, pouvant varier). La fonction f est-elle convexe ?

7. Dans quelle mesure le graphe d'une fonction convexe est-il assimilable à une parabole ?
8. Suite de [19.2] – Les graphes de f, f' et f'' ont été tracés avec des échelles différentes. Pourquoi ?

35. Inégalité arithmético-géométrique

Quels que soient les réels x_1, \dots, x_n positifs ou nuls, →[40.4]

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

36. La série de terme général

$$u_n = \ln n - 2 \ln(n+1) + \ln(n+2)$$

est convergente et sa somme est négative.

37. Inégalité de Hölder

Soient deux réels p et q strictement supérieurs à 1 tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

On dit que ces réels sont **conjugués**.

Pour tout réel $p > 1$ et tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d$, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^d |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

1. Soient $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$ dans \mathbb{K}^d tels que $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Alors, par concavité de ℓ_n ,

$$\forall 1 \leq i \leq d, \quad |x_i y_i| \leq \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^d |x_i y_i| \leq 1.$$

2. On en déduit l'**inégalité de Hölder** : →[3.59]

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^d \times \mathbb{K}^d, \quad \sum_{i=1}^d |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

38. Douze étudiants sont réunis autour d'une table ronde pour fêter les vingt ans de l'un d'eux. On remarque que l'âge de chacun est égal à la moyenne de l'âge de ses deux voisins. Quel est l'âge des voisins de celui dont on célèbre l'anniversaire ?

Approfondissement

39. Régularité des fonctions convexes

Soit f , une fonction convexe sur un intervalle ouvert I .

39.1 La fonction f est continue sur I . →[33. 2.b]

39.2 L'ensemble des points de I en lesquels f n'est pas dérivable est fini ou dénombrable. →[27.1]

40. Convexité stricte

La fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **strictement convexe** lorsque tout arc est situé strictement au-dessous de la corde qu'il intercepte (à l'exception évidente des points de contact) : pour tout x et y distincts dans I ,

$$\forall 0 < t < 1, \quad f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y).$$

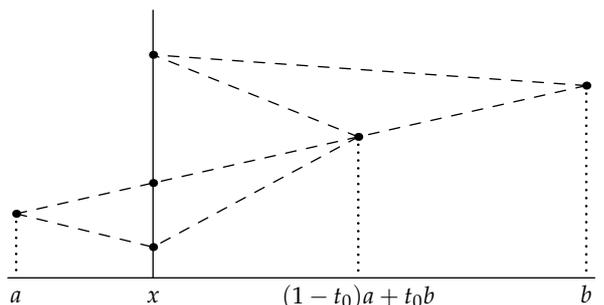
40.1 Soit f , une fonction convexe sur $[a, b]$.

S'il existe $0 < t_0 < 1$ tel que

$$f((1-t_0)a + t_0b) = (1-t_0)f(a) + t_0f(b),$$

alors

$$\forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)a + tb) = (1-t)f(a) + tf(b).$$



Autrement dit, si une fonction convexe n'est pas strictement convexe, alors elle est affine sur (au moins) un intervalle de longueur strictement positive.

40.2 Soit f , une fonction deux fois dérivable sur I , dont la dérivée seconde est strictement positive.

La fonction f est strictement convexe. De plus, tout arc est situé strictement au-dessus de ses tangentes (à l'exception évidente des points de contact) :

$$\forall x_0 \in I, \forall x \neq x_0, \quad f(x) + (x - x_0)f'(x_0) < f(x).$$

40.3 Soient x_1, \dots, x_n, x_{n+1} dans I tels que

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

Alors, par convexité de f ,

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n} f\left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} x_k\right) + \frac{1}{n} f(x_n) \\ = \frac{n-1}{n} \left[\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right] + \frac{1}{n} f(x_n) \end{aligned}$$

et par convexité stricte,

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} x_k = x_n.$$

40.4 Inégalité arithmético-géométrique

Quels que soient x_1, \dots, x_n strictement positifs,

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

avec égalité si, et seulement si, $x_1 = \dots = x_n$.

41. Enveloppe convexe d'une famille finie de points

Soit A , une partie non vide de l'espace vectoriel E .

L'**enveloppe convexe** de A est la plus petite partie convexe de E qui contienne A .

41.1 Il existe au moins une partie convexe de E qui contient A . L'enveloppe convexe de A est l'intersection de toutes les parties convexes de E qui contiennent A .

41.2 Soient $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$, une famille de points d'un sous-espace affine E et K , l'ensemble des combinaisons convexes des points $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$.

1. L'ensemble K est une partie convexe de E qui contient les points A_1, \dots, A_n .

2. Toute partie convexe de E qui contient les points A_1, \dots, A_n contient l'ensemble K .

3. Quelle est l'enveloppe convexe de trois points non alignés ?

41.3 Théorème de Gauss Lucas

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme non constant.

4. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_0) \neq 0$. Il existe des entiers m_1, \dots, m_r supérieurs à 1 et des complexes deux à deux distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que

$$\frac{P'(z_0)}{P(z_0)} = \sum_{k=1}^r \frac{m_k}{z_0 - \alpha_k}.$$

5. Les racines de P' appartiennent à l'enveloppe convexe de l'ensemble des racines de P .

41.4 Optimisation sous contrainte

Soit K , l'enveloppe convexe des points A_1, \dots, A_n . On note φ , une forme linéaire sur E considérée comme une application de K dans \mathbb{R} et on pose

$$\lambda = \min_{1 \leq k \leq n} \varphi(A_k) \quad \text{et} \quad \mu = \max_{1 \leq k \leq n} \varphi(A_k).$$

6. Pour tout $M \in K$, le réel $\varphi(M)$ est une combinaison convexe de $\varphi(A_1), \dots, \varphi(A_n)$.

7. L'application φ atteint un maximum et un minimum sur K . Ces extrema sont atteints en l'un des points A_1, \dots, A_n .

41.5 Mesures de probabilité sur un ensemble fini

L'ensemble fini $E = \{1, \dots, n\}$ est muni de la tribu $\mathcal{E} = \mathfrak{P}(E)$, dite **tribu discrète**. On peut identifier toute mesure de probabilité sur (E, \mathcal{E}) à une fonction de E dans \mathbb{R} .

Pour tout $1 \leq k \leq n$, on note ε_k , la mesure de Dirac en k , définie par

$$\varepsilon_k(k) = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \neq k, \quad \varepsilon_k(j) = 0.$$

L'ensemble des mesures de probabilité sur (E, \mathcal{E}) est l'enveloppe convexe des mesures de Dirac $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$.

Pour aller plus loin

42. Questions pour réfléchir

1. Toute partie convexe est connexe par arcs.
2. L'enveloppe convexe [41] d'une partie compacte de \mathbb{R}^n est une partie compacte de \mathbb{R}^n .

3. Soit f , une fonction convexe de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . L'ensemble des points $x_0 \in \mathbb{R}$ en lesquels f n'est pas dérivable est une partie dénombrable de \mathbb{R} .

43. Courbe d'imposition

Dans le cas général, le calcul de l'impôt sur le revenu repose sur le **revenu imposable** R et le **quotient familial** $Q = R/N$, où N est le **nombre de parts**. L'**impôt brut** I est alors donné par

$$I = T_m \times R - N \times b = N(T_m \times Q - b)$$

où T_m est le **taux marginal**. Les valeurs de T_m et b dépendent de la valeur de Q (en euros) :

— $T_m = 0, b = 0$ et $I = 0$ si $Q < 6\,011$

— $T_m = 5,5\%$ et $b = 330,61$ si $6\,011 \leq Q < 11\,991$

— $T_m = 14\%$ et $b = 1\,349,84$ si $11\,991 \leq Q < 26\,631$

— $T_m = 30\%$ et $b = 5\,610,8$ si $26\,631 \leq Q < 71\,397$

— $T_m = 41\%$ et $b = 13\,464,47$ si $71\,397 \leq Q < 151\,200$

— $T_m = 45\%$ et $b = 19\,512,47$ si $Q \geq 151\,200$.

43.1 Le nombre de parts N étant fixé, l'impôt brut I est une fonction f affine par morceaux, continue et convexe du quotient familial Q .

43.2 Idées reçues

Dans chaque cas étudié, on suppose qu'un seul paramètre varie.

1. Lors que le revenu imposable augmente : $R_2 > R_1$, l'impôt augmente aussi : $I_2 > I_1$, mais $R_2 - I_2 > R_1 - I_1$, même si on passe d'une tranche à la suivante.

La convexité de f fait que l'augmentation de l'impôt est proportionnellement plus importante pour les revenus moyens que pour les revenus élevés :

— À la suite d'une promotion, un célibataire ($N = 1$) voit son revenu imposable R passer de 25 k€ à 30 k€. Son impôt brut passe alors de 2,1 k€ à 3,4 k€, soit une augmentation de 58%.

— Un autre célibataire voit son revenu imposable passer de 100 k€ à 120 k€. Son impôt brut passe alors de 27,5 k€ à 35,7 k€, soit une augmentation de 30%.

2. Un couple ne fait pas nécessairement d'économies en passant de l'imposition séparée à l'imposition commune car la fonction f n'est pas strictement convexe [40].

3. Lorsqu'un ménage fiscal ayant déjà deux enfants à charge ($N = 3$) déclare un troisième enfant à charge ($N = 4$), l'impôt brut diminue en passant de $3f(R/3)$ à $4f(R/4)$ et cette diminution est d'autant plus importante que R est élevé car l'ordonnée à l'origine $-b$ est négative et que sa valeur absolue est une fonction croissante de Q . (L'administration fiscale prévoit dans ce cas un **plafonnement** du quotient familial.)

44. Barycentre dans un sous-espace affine

Par définition, les éléments d'un sous-espace affine sont des **points**. Mais comme un sous-espace affine \mathcal{F} est une partie d'un espace vectoriel E , on peut considérer les points de \mathcal{F} comme des vecteurs de E .

En particulier, quels que soient les points A et B de \mathcal{F} , le vecteur \mathbf{AB} est défini comme la combinaison linéaire $(B - A)$ des vecteurs A et B de E , de telle sorte que

$$A + \mathbf{AB} = B.$$

44.1 Une partie \mathcal{F} de l'espace vectoriel E est un **sous-espace affine** si, et seulement si, il existe un sous-espace vectoriel F tel que

$$\forall A \in \mathcal{F}, M \in \mathcal{F} \iff \mathbf{AM} \in F.$$

Le sous-espace vectoriel F est la **direction** du sous-espace affine \mathcal{F} .

44.2 Une famille de couples $(A_k, \alpha_k) \in \mathcal{F} \times \mathbb{K}$ étant donnée, si le poids total n'est pas nul, alors le barycentre G de ce système pondéré est l'unique solution de l'équation

$$\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right) \cdot \mathbf{OM} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \mathbf{OA}_k$$

d'inconnue $M \in \mathcal{F}$, quel que soit le point $O \in \mathcal{F}$ choisi.

44.3 Si au contraire le poids total est nul, alors la combinaison linéaire

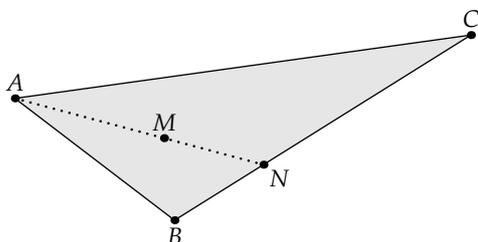
$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \mathbf{OA}_k$$

est un vecteur de F qui est indépendant du point $O \in \mathcal{F}$ choisi.

45. Représentation barycentrique d'un triangle

Soient A, B et C , trois points non alignés du plan et M , une combinaison convexe de A, B et C : il existe trois réels positifs α, β et γ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et

$$M = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$



1. Si deux des trois poids sont nuls, alors M est l'un des sommets du triangle ABC .
2. Si un des poids est nul, alors M est sur l'un des côtés du triangle.
3. Si les trois poids sont strictement positifs, alors M est à l'intérieur du triangle. Dans ce cas,

$$\begin{cases} N = \frac{\beta}{\beta+\gamma}B + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}C \in]B, C[\\ M = \alpha A + (1 - \alpha)N \in]A, N[. \end{cases}$$

46. Caractérisation affine du barycentre

On considère une famille de points $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'un sous-espace affine \mathcal{E} de direction E , une famille de réels $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$ et l'application $f : \mathcal{E} \rightarrow E$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{E}, f(M) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \mathbf{MA}_k.$$

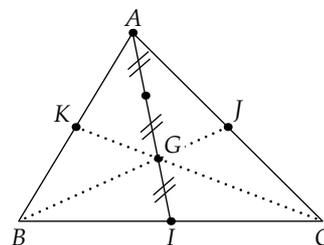
On pose $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

1. $\forall M, G \in \mathcal{E}, f(M) = f(G) + \alpha \cdot \mathbf{MG}$.
2. Si $\alpha = 0$, alors la fonction f est constante.

3. Si $\alpha \neq 0$, alors il existe un, et un seul, point $G \in \mathcal{E}$ tel que $f(G) = \mathbf{0}$. Ce point G est le barycentre du système pondéré $[(A_k, \alpha_k)]_{1 \leq k \leq n}$.

47. Isobarycentre et médianes

Soient A, B et C , trois points du plan formant un triangle. L'isobarycentre G des points A, B et C est le point de concours des trois médianes.



Si I est le milieu du côté $[B, C]$, alors G est au tiers de la hauteur sur $[A, I]$:

$$\mathbf{IG} = \frac{1}{3} \cdot \mathbf{IA}.$$

48. On suppose que la dimension de l'espace affine \mathcal{E} est égale à 3 et que sa direction E est munie d'une structure euclidienne. On considère trois points non alignés A, B et C .

1. L'ensemble des points M tels que

$$(2\mathbf{MA} + \mathbf{MB}) \wedge \mathbf{BC} = \mathbf{0}$$

est une droite parallèle à la droite (BC) .

2. L'ensemble des points M tels que

$$(\mathbf{MA} - 3\mathbf{MB}) \wedge (\mathbf{MB} + 3\mathbf{MC}) = \mathbf{0}$$

est une droite contenue dans le plan du triangle ABC .

3. L'ensemble des points M tels que

$$(\mathbf{MA} + \mathbf{MB} + \mathbf{MC}) \wedge (3\mathbf{MA} + \mathbf{MB} - 4\mathbf{MC}) = \mathbf{0}$$

est une droite contenue dans le plan du triangle ABC .

49. Fonction de Leibniz

On suppose que l'espace vectoriel E est muni d'une structure euclidienne.

49.1 On considère un système pondéré $[(A_k, \alpha_k)]_{1 \leq k \leq n}$ et la fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall M \in E, f(M) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \|\mathbf{MA}_k\|^2.$$

1. On suppose que le poids total α n'est pas nul et on note G , le barycentre du système pondéré $[(A_k, \alpha_k)]_{1 \leq k \leq n}$. Alors

$$f(M) = \alpha \|\mathbf{MG}\|^2 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \|\mathbf{GA}_k\|^2$$

et les lignes de niveau de f sont des sphères (éventuellement vides).

2. Si $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$), alors la fonction f atteint son minimum absolu (resp. son maximum absolu) en $M = G$.

3. Que dire des lignes de niveau de f lorsque $\alpha = 0$?

49.2 Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$, avec $k \neq 1$, et A, B , deux points distincts. L'ensemble des points M tels que

$$\frac{\|\mathbf{MA}\|}{\|\mathbf{MB}\|} = k$$

est la sphère dont le centre est le barycentre G du système $[(A, 1), (B, -k^2)]$ et de rayon $k \cdot GB > 0$.

50. Soient G_1 et G_2 , deux points distincts. On pose

$$\forall M \in E, g(M) = \langle \mathbf{MG}_1 \mid \mathbf{MG}_2 \rangle.$$

1. La fonction g atteint son minimum absolu en G_0 , milieu du segment $[G_1, G_2]$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble des points M tels que $g(M) = k$ est une sphère (éventuellement vide) dont le centre est sur la droite (G_1G_2) .

3. L'ensemble des points M tels que $g(M) = 0$ est la sphère de diamètre $[G_1, G_2]$.

51. On suppose que E est un espace de dimension 3 muni d'une structure euclidienne.

51.1 Si A, B et C sont trois points distincts, alors l'ensemble des points M tels que

$$\langle 2MA - 3MB + 4MC \mid AB \rangle = 0$$

est un plan affine, orthogonal à la droite (AB) .

51.2 On suppose que les points A, B et C ne sont pas alignés.

1. L'ensemble des points M tels que

$$\langle 2MA - MB - MC \mid MA \rangle = 0$$

est un plan affine qui contient A .

2. L'ensemble des points M tels que

$$\langle 3MA + MB - 4MC \mid MA \rangle = \langle MA - 2MB + 3MC \mid AB \rangle$$

est un plan affine.

3. La fonction f définie par

$$\forall M \in E, f(M) = \langle MA + 2MB \mid MB + 2MC \rangle$$

atteint un minimum absolu mais n'est pas majorée.

4. La fonction f définie par

$$\forall M \in E, f(M) = \langle 2MA + MB \mid MA - 3MC \rangle$$

atteint un maximum absolu mais n'est pas minorée.

5. La fonction f définie par

$$\forall M \in E, f(M) = \langle MA - 2MC \mid -5MB + MC \rangle$$

atteint un minimum absolu mais n'est pas majorée.

6. La fonction f définie pour tout $M \in E$ par

$$f(M) = \langle MA - 3MB + 2MC \mid MA + MB + 2MC \rangle$$

n'est ni majorée, ni minorée.

7. La fonction f définie pour tout $M \in E$ par

$$f(M) = \langle 2MA - 5MB + 3MC \mid MA + MB - 2MC \rangle$$

est constante.

52. Soient A, B et C , trois points non alignés d'un espace affine euclidien de dimension 3.

52.1 L'ensemble des points M tels que

$$\|-2MA + MB + 4MC\| = \|MA + MB + MC\|$$

est un plan.

52.2 L'ensemble des points M tels que

$$\|MA + 2MB\| = \|3MB + MC\|$$

est une sphère.

→[49.2]

52.3 Pour tout $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble des points $M \in E$ tels que

$$\|MA\|^2 - \|MB\|^2 = k$$

est un plan affine, orthogonal à la droite (AB) .