

1. On se place dans un espace affine réel $\mathcal{E}$ de dimension finie (supérieure à 2), dirigé par un espace euclidien E .

2. Notion de courbe

2.1 $\hookrightarrow$ Un **arc paramétré** est un couple (I, f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f , une fonction continue de I dans E .

L'arc (I, f) est de **classe** $\mathcal{C}^p$ lorsque $f \in \mathcal{C}^p(I, E)$.

2.2 $\hookrightarrow$ Le **support de l'arc** (I, f) est l'ensemble $\Gamma \subset \mathcal{E}$ défini par

$$\Gamma = \{f(t), t \in I\}.$$

2.3 La notion de **courbe** de $\mathcal{E}$ va coïncider dans ce chapitre avec celle de support d'un arc paramétré (I, f) . Il est possible de définir cette notion d'autres manières.

3. $\hookrightarrow$ Un point $M_0 \in \Gamma$ est un **point double** de l'arc (I, f) lorsqu'il existe deux valeurs $s \neq t$ du paramètre telles que

$$M_0 = f(s) = f(t).$$

C'est un **point multiple** lorsqu'il existe au moins deux valeurs distinctes du paramètre t telles que $M_0 = f(t)$.

4. $\hookrightarrow$ Un arc $([a, b], f)$ est un **arc fermé** lorsque $f(a) = f(b)$.

5. $\hookrightarrow$ Un arc fermé $([a, b], f)$ est **simple** lorsque

$$\forall a \leq s < t < b, \quad f(s) \neq f(t).$$

6. Interprétation cinématique

On considère un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $f : I \rightarrow E$. On note $\Gamma \subset \mathcal{E}$, le support de l'arc (I, f) .

6.1 On suppose dans l'exposé de la théorie que la fonction f est **régulière**, c'est-à-dire qu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I avec k aussi grand que nécessaire.

6.2 Un point $O \in \mathcal{E}$ étant choisi comme origine, on peut concevoir la fonction f comme un **vecteur position** qui varie au cours du temps.

$$\forall t \in I, \quad \mathbf{OM}(t) = f(t)$$

La dérivée f' apparaît alors comme le **vecteur vitesse** :

$$\forall t \in I, \quad \mathbf{V}(t) = \frac{d\mathbf{OM}(t)}{dt} = f'(t)$$

et la dérivée seconde f'' comme le **vecteur accélération** :

$$\forall t \in I, \quad \mathbf{A}(t) = \frac{d^2\mathbf{OM}(t)}{dt^2} = f''(t).$$

6.3 Dans cette interprétation cinématique, l'arc paramétré (I, f) est conçu comme un **mouvement** et son support est alors la **trajectoire** de ce mouvement : différents mouvements peuvent décrire une même trajectoire.

7. $\rightarrow$ Formule de Taylor-Young vectorielle

Quels que soient $t_0 \in I$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{OM}(t_0 + h) &= \mathbf{OM}(t_0) + h \cdot \mathbf{V}(t_0) + \frac{h^2}{2} \cdot \mathbf{A}(t_0) \\ &\quad + \sum_{q=3}^p \frac{h^q}{q!} \cdot f^{(q)}(t_0) + o(h^p) \end{aligned}$$

pour tout h voisin de 0 tel que $t_0 + h \in I$.

Entraînement

8. Questions pour réfléchir

1. Un arc fermé simple possède-t-il un point multiple ?
2. On peut considérer f comme une fonction à valeurs dans l'espace affine $\mathcal{E}$ ou comme une fonction à valeurs dans l'espace vectoriel E . Au contraire, ses dérivées $f', f'', \dots$ ne peuvent être considérées que comme des fonctions à valeurs dans l'espace vectoriel E .

I

Tangente en un point

9. Les courbes les plus simples sont les droites. La tangente à une courbe Γ en un point M_0 est donc une manière d'approcher Γ au voisinage de M_0 par une courbe aussi simple que possible.

I.1 Cas d'un point régulier

10. $\hookrightarrow$ Soit (I, f) , un arc paramétré.

10.1 Le point $(t_0, f(t_0))$ est un **régulier** lorsque $f'(t_0) \neq \mathbf{0}_E$.

10.2 Il est **singulier**, ou **stationnaire**, lorsque $f'(t_0) = \mathbf{0}_E$.

10.3 L'arc paramétré (I, f) est **régulier** lorsque le vecteur vitesse ne s'annule jamais :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) \neq \mathbf{0}_E.$$

11. $\hookrightarrow$ Soient $t_0 \in I$ et $M_0 = f(t_0)$. Si (t_0, M_0) est un point régulier de l'arc (I, f) , alors la courbe Γ admet la droite

$$T_{M_0}\Gamma = M_0 + \mathbb{R} \cdot f'(t_0)$$

pour **tangente** au point M_0 .

12. $\hookrightarrow$ Si (t_0, M_0) est un point régulier de (I, f) , alors le **vecteur unitaire tangent** à l'instant t_0 est défini par

$$\mathbf{T}(t_0) = \frac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}.$$

I.2 Cas d'un point stationnaire

13.1 Soit $u \neq \mathbf{0}_E$. Le support de l'arc paramétré

$$(J, g) = (\mathbb{R}, [h \mapsto M_0 + h^p \cdot u])$$

est une droite si p est impair ; une demi-droite si p est pair.

13.2 $\hookrightarrow$ Soient $t_0 \in I$ et $M_0 = f(t_0)$. S'il existe un entier $p \geq 1$ tel que

$$f^{(p)}(t_0) \neq \mathbf{0}_E = f'(t_0) = \dots = f^{(p-1)}(t_0),$$

alors la courbe Γ admet la droite

$$T_{M_0}\Gamma = M_0 + \mathbb{R} \cdot f^{(p)}(t_0)$$

pour **tangente** au point M_0 .

14. Étude au voisinage d'un point stationnaire

On suppose qu'il existe un entier $p \geq 2$ tel que

$$f'(t_0) = \dots = f^{(p-1)}(t_0) = \mathbf{0}_E \neq f^{(p)}(t_0)$$

et un entier $q > p$ tel que $f^{(q)}(t_0)$ ne soit pas colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$ et que

$$\forall p \leq k < q, \quad \text{Det}(f^{(k)}(t_0), f^{(p)}(t_0)) = 0.$$

14.1 Réécriture de la formule de Taylor-Young

Pour tout h voisin de 0 tel que $t_0 + h \in I$,

$$OM(t_0 + h) = OM(t_0) + \left(\frac{h^p}{p!} + o(h^p) \right) \cdot f^{(p)}(t_0) \\ + \left(\frac{h^q}{q!} + o(h^q) \right) \cdot f^{(q)}(t_0).$$

Autrement dit, dans le repère affine $(M_0, f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$, les coordonnées $(X(t), Y(t))$ de M_t vérifient

$$X(t) \sim \frac{(t - t_0)^p}{p!} \quad \text{et} \quad Y(t) \sim \frac{(t - t_0)^q}{q!} = o(X(t))$$

lorsque t tend vers t_0 .

14.2 La droite issue de M_0 et dirigée par $f^{(p)}(t_0)$ est la tangente à Γ au point M_0 .

14.3 L'allure du support au voisinage de M_0 , c'est-à-dire la position de Γ par rapport à sa tangente en M_0 , se déduit alors des parités respectives des entiers p et de q .

14.4 $\Rightarrow$ Le point $M_0 = f(t_0)$ est un **point de rebroussement** lorsque l'entier p est pair.

14.5 $\Rightarrow$ Le point $M_0 = f(t_0)$ est un **point d'inflexion** lorsque les entiers p et q sont impairs.

I.3 Caractérisation géométrique

15. On cherche maintenant à définir la tangente à une courbe indépendamment du paramétrage utilisé pour définir cette courbe.

15.1 On pose $M_0 = f(t_0)$ et $M(t) = f(t)$, de telle sorte que

$$M_0 M(t) = f(t) - f(t_0).$$

15.2 $\Rightarrow$ Si l'expression vectorielle

$$\frac{M_0 M(t)}{\|M_0 M(t)\|}$$

admet une limite $\mathbf{u} \in E$ (resp. $\mathbf{v} \in E$) lorsque t tend vers t_0 par valeurs supérieures (resp. par valeurs inférieures), alors le support Γ de l'arc (I, f) admet la demi-droite affine

$$M_0 + \mathbb{R}_+ \cdot \mathbf{u} \quad (\text{resp. } M_0 + \mathbb{R}_+ \cdot \mathbf{v})$$

pour **demi-tangente à droite** (resp. **à gauche**) au point M_0 .

15.3 $\Rightarrow$ Le support Γ admet la droite $M_0 + \mathbb{R} \cdot \mathbf{u}$ pour **tangente** au point M_0 lorsqu'il admet en ce point une demi-tangente à droite et une demi-tangente à gauche toutes deux dirigées par $\mathbf{u}$.

Entraînement**16. Questions pour réfléchir**

1. Le support Γ peut-il admettre plusieurs tangentes en un même point M_0 ?

2. Soit $M_0 = f(t_0)$. On suppose que $f'(t_0) \neq \mathbf{0}_E$ et que $\mathbf{u} \in E$ est un vecteur de même norme que $f'(t_0)$.

2.a Le support Δ de l'arc paramétré

$$(J, g) = (\mathbb{R}, [h \mapsto M_0 + h \cdot \mathbf{u}])$$

est une droite.

2.b Lorsque h tend vers 0,

$$\forall \mathbf{u} \in E, \quad f(t_0 + h) = M_0 + \mathbf{u} \cdot h + \mathcal{O}(h)$$

et le vecteur $f'(t_0)$ est caractérisé par :

$$f(t_0 + h) = M_0 + \mathbf{u} \cdot h + o(h) \iff \mathbf{u} = f'(t_0).$$

Commenter.

3. On suppose que M_0 est un point double de Γ :

$$\exists s < t, \quad M_0 = f(s) = f(t)$$

et que $f'(s)$ et $f'(t)$ sont distincts du vecteur nul. Décrire l'allure de Γ au voisinage de M_0 .

4. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

4.a Si la fonction f est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (\cos t, 0),$$

alors le support de l'arc paramétré $(\mathbb{R}, f)$ est un segment de droite.

4.b Si le support de $(\mathbb{R}, f)$ est un segment, que dire du vecteur $f^{(q)}(t_0)$ lorsque $M_0 = f(t_0)$ est l'une des extrémités de ce segment?

4.c Si le support de $(\mathbb{R}, f)$ est un triangle et si $M_0 = f(t_0)$ est un sommet du triangle, que dire de $f^{(q)}(t_0)$?

5. Soit (t_0, M_0) , un point régulier de (I, f) . L'expression

$$\frac{M_0 M(t)}{\|M_0 M(t)\|}$$

admet une limite à gauche et une limite à droite lorsque t tend vers t_0 . Comparer ces limites. Étudier le cas d'un point singulier.

6. La tangente à Γ au point M_0 est la droite affine la plus proche de Γ au voisinage de ce point. Discuter.

17. L'arc paramétré

$$f(t) = \left(t + \frac{a}{t^2}, t^2 + \frac{b}{t} \right)$$

admet un point stationnaire au point de paramètre $t = 1$ si, et seulement si, $a = 1/2$ et $b = 2$. Dans ce cas,

$$f(1 + h) = f(1) + \frac{h^2}{2} \cdot (3, 6) + h^3(-2, -2) + o(h^3)$$

pour h voisin de 0 : le point $f(1)$ est un point de rebroussement.

18. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, distinct de $(0, 0)$. L'arc paramétré

$$\forall t > 0, \quad f(t) = \left(2t + \frac{a^3}{t^2}, t^2 + \frac{b^3}{t} \right)$$

admet un point stationnaire si, et seulement si, $b = \sqrt[3]{2}a$. Ce point est alors un point de rebroussement :

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h^2}{a} \cdot (3, 0) + \frac{h^3}{a^2} \cdot (4, 2a) + o(h^3).$$

II**Abscisse curviligne**

19. On suppose que l'espace E est muni d'une structure euclidienne.

19.1 $\Rightarrow$ Si $([a, b], f)$ est un arc régulier de classe $\mathcal{C}^1$, alors la **longueur** de cet arc est égale à

$$\int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

19.2 $\Rightarrow$ Si (I, f) est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$, on appelle **abscisse curviligne** de (I, f) toute primitive de $[t \mapsto \|f'(t)\|]$.

19.3 Une abscisse curviligne est une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Entraînement**20. Questions pour réfléchir**

1. Pourquoi suppose-t-on l'arc (I, f) régulier ?
2. Définir la longueur d'un arc paramétré (I, f) lorsque l'intervalle I n'est pas un segment.
3. Que dire des abscisses curvilignes d'un arc régulier ?

III**Repère de Frenet**

21. On se limite ici aux courbes planes : l'espace euclidien E est un plan qu'on suppose orienté.

Le choix d'une base orthonormée directe (e_1, e_2) de E permet d'identifier E au plan complexe $\mathbb{C}$ grâce à l'isométrie

$$[(x \cdot e_1 + y \cdot e_2) \mapsto x + iy].$$

On rappelle que $\mathbb{U}$ désigne le cercle unité du plan complexe.

III.1 Déterminations de l'argument

22.1 L'application $[\theta \mapsto e^{i\theta}]$ réalise une bijection continue de l'intervalle ouvert $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

22.2 $\hookrightarrow$ La *détermination principale de l'argument*

$$\text{Arg} : \mathbb{U} \setminus \{-1\} \rightarrow]-\pi, \pi[$$

est la bijection réciproque de $[\theta \mapsto e^{i\theta}]$ considérée comme une application de $]-\pi, \pi[$ dans $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

22.3 Si $x + iy \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$, alors

$$\text{Arg}(x + iy) = 2 \text{Arctan} \frac{y}{1+x}$$

et la fonction Arg est continue sur $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

23.1 $\hookrightarrow$ Soit $f : I \rightarrow \mathbb{U}$, une fonction continue. Une *détermination continue de l'argument* de f est une fonction continue $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(t) = \exp[i\alpha(t)]$$

pour tout $t \in I$.

23.2 Si θ_1 et θ_2 sont deux déterminations continues de l'argument de $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{U})$, alors

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \forall t \in I, \quad \theta_2(t) = \theta_1(t) + 2k\pi.$$

24. Théorème de relèvement

24.1 Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{U})$. S'il existe une fonction $\theta \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telle que $f(t) = \exp[i\theta(t)]$ pour tout $t \in I$, alors

$$\forall t \in I, \quad \theta'(t) = \frac{-if'(t)}{f(t)}.$$

24.2 $\rightarrow$ Soit $k \geq 1$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{U})$, il existe une fonction $\theta \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in I, \quad f(t) = e^{i\theta(t)}.$$

III.2 Repère mobile

25.1 Pour tout vecteur unitaire u , il existe un, et un seul, vecteur v tel que (u, v) soit une base orthonormée directe de E .

25.2 $\hookrightarrow$ Soit (I, f) , un arc paramétré régulier. Pour tout $t \in I$, l'unique vecteur $N(t)$ telle que

$$(T(t), N(t))$$

soit une base orthonormée de E est appelé *vecteur unitaire normal* à l'instant $t \in I$.

25.3 $\triangleright$ Si (I, f) est un arc régulier de classe $\mathcal{C}^2$, il existe une application $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$T(t) = (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t)) \quad \text{et} \quad N(t) = (-\sin \alpha(t), \cos \alpha(t))$$

pour tout $t \in I$.

26. Décomposition de l'accélération [25.3]

Soit (I, f) , un arc régulier de classe $\mathcal{C}^2$.

26.1 Pour tout $t \in I$,

$$\frac{dT(t)}{dt} = \alpha'(t) \cdot N(t) \quad \text{et} \quad \frac{dN(t)}{dt} = -\alpha'(t) \cdot T(t).$$

26.2 Pour tout $t \in I$,

$$V(t) = \|V(t)\| \cdot T(t)$$

$$A(t) = \frac{d\|V(t)\|}{dt} \cdot T(t) + \alpha'(t) \|V(t)\| \cdot N(t).$$

26.3 $\hookrightarrow$ L'*accélération tangentielle* est définie par

$$A_T(t) = \frac{d\|V(t)\|}{dt} \cdot T(t).$$

26.4 $\hookrightarrow$ L'*accélération normale* est définie par

$$A_N(t) = \alpha'(t) \|V(t)\| \cdot N(t).$$

26.5 L'accélération tangentielle $A_T : I \rightarrow E$ et l'accélération normale $A_N : I \rightarrow E$ sont des fonctions continues.

26.6 $\rightarrow$ Pour tout $t \in I$,

$$A_T(t) = \langle T(t) | A(t) \rangle \cdot T(t)$$

$$A_N(t) = \langle N(t) | A(t) \rangle \cdot N(t) \\ = \text{Det}(T(t), A(t)) \cdot N(t).$$

III.3 Courbure

27. Suite de [9] – On veut préciser l'allure du support au voisinage du point $M_0 = f(t_0)$, en approchant localement la courbe Γ par un cercle.

28. $\hookrightarrow$ Le point (t_0, M_0) est un *point birégulier* de l'arc paramétré (I, f) lorsque

$$\text{Det}(V(t_0), A(t_0)) \neq 0$$

et un *point d'inflexion* dans le cas contraire.

29.1 Si le support de (I, f) est un cercle de centre O et de rayon $R > 0$, alors

$$\langle OM(t) | V(t) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle OM(t) | A_N(t) \rangle = -\|V(t)\|^2$$

pour tout $t \in I$.

29.2 $\hookrightarrow$ La *courbure* $\gamma(t_0)$ en un point régulier (t_0, M_0) de (I, f) est définie par

$$A_N(t_0) = \gamma(t_0) \|V(t_0)\|^2 \cdot N(t_0)$$

c'est-à-dire

$$\gamma(t_0) = \frac{\text{Det}(V(t_0), A(t_0))}{\|V(t_0)\|^3}.$$

La courbure n'est pas définie en un point stationnaire.

29.3 Le point (t_0, M_0) est birégulier si, et seulement si, la courbure $\gamma(t_0)$ n'est pas nulle.

29.4 Suite de [25.3] – Si (t_0, M_0) est un point régulier, alors

$$\gamma(t_0) = \frac{\alpha'(t_0)}{\|V(t_0)\|}.$$

30.1 Si le support de (I, f) est un cercle de rayon $R > 0$, alors

$$\forall t \in I, \quad \gamma(t) = \frac{1}{R}.$$

30.2 $\nRightarrow$ Si (t_0, M_0) est un point birégulier de (I, f) , alors le **rayon de courbure** $R(t_0)$ est défini par

$$R(t_0) = \frac{\|V(t_0)\|^3}{\text{Det}(V(t_0), A(t_0))}.$$

30.3 Le rayon de courbure est homogène à une longueur.

30.4 $\triangleright$ Pour tout $t \in I$,

$$R(t) = \frac{1}{\gamma(t)}.$$

Plus la courbure est petite, plus le rayon de courbure est grand.

30.5 Suite de [25.3] – Pour tout $t \in I$ tel que $\alpha'(t) \neq 0$,

$$R(t) = \frac{s'(t)}{\alpha'(t)}$$

ce qui est symboliquement équivalent à

$$ds = R d\alpha.$$

31. Centre de courbure et cercle osculateur

On suppose que (t_0, M_0) est un point birégulier de (I, f) .

31.1 $\nRightarrow$ Le **centre de courbure*** $C(t_0)$ est défini par

$$M_0 C(t_0) = R(t_0) \cdot N(t_0).$$

31.2 $\nRightarrow$ Le **cercle osculateur*** au point M_0 du support Γ est le cercle de centre $C(t_0)$ et de rayon $R(t_0)$.

31.3 La tangente au cercle osculateur au point M_0 est aussi la tangente au support Γ en ce point. Le cercle osculateur est, de tous les cercles qui passent par le point M_0 , celui qui est localement le plus proche du support Γ . $\rightarrow$ [129]

Entraînement

32. Questions pour réfléchir

1. La fonction Arg ne peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{U}$.
2. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{U}$, une fonction régulière. Étudier les allures possibles du graphe de $\text{Arg} \circ f$ en prenant la convention : $\text{Arg}(-1) = \pi$. Condition pour que $\text{Arg} \circ f$ soit continue ?
3. Condition pour que l'accélération tangentielle A_T soit identiquement nulle.
4. Condition pour que l'accélération normale A_N soit identiquement nulle.
5. Suite de [25.3] – Le point (t_0, M_0) est birégulier si, et seulement si, $\alpha'(t_0) \neq 0$.
6. Suite de [30.5] – Interprétation cinématique.
7. On considère le graphe d'une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ comme le support d'un arc paramétré :

$$(I, f) = [I, (t, g(t))].$$

Calculer les vecteurs $V(t)$ et $A(t)$, en déduire l'expression de la courbure.

8. En quels points du support faut-il calculer la courbure ?

IV.1 Propriétés géométriques

33. Arcs équivalents

33.1 $\nRightarrow$ Un **changement de paramétrage admissible** de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geq 1$) est une application de classe $\mathcal{C}^k$ dont la dérivée ne s'annule pas.

33.2 Si $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ est un changement de paramétrage admissible, alors φ est strictement monotone et réalise un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ de J sur $I = \varphi_*(J)$.

33.3 $\nRightarrow$ On dit que deux arcs paramétrés (I, f) et (J, g) sont **$\mathcal{C}^k$ -équivalents** lorsqu'il existe un changement de paramétrage admissible $\varphi : I \rightarrow J$ de classe $\mathcal{C}^k$ tel que $f = g \circ \varphi$.

33.4 La $\mathcal{C}^k$ -équivalence est une relation d'équivalence sur les arcs paramétrés.

33.5 Deux arcs $\mathcal{C}^k$ -équivalents ont même support.

34. Les **propriétés géométriques** d'un arc paramétré sont les propriétés qui sont conservées par tout changement de paramétrage admissible.

35. Soient (I, f) et (J, g) , deux arcs $\mathcal{C}^k$ -équivalents : il existe un changement de paramétrage admissible $\varphi : I \rightarrow J$ tel que

$$\forall t \in I, \quad f(t) = g(\varphi(t)).$$

On considère un point $M_0 = f(t_0)$ sur le support Γ de (I, f) et on note $u_0 = \varphi(t_0) \in J$, de sorte que $M_0 = g(u_0)$.

35.1

$$f'(t_0) = \varphi'(t_0) \cdot g'(u_0)$$

$$f''(t_0) = [\varphi'(t_0)]^2 \cdot g''(u_0) + \varphi''(t_0) \cdot g'(u_0)$$

35.2 Le point (t_0, M_0) est régulier (resp. birégulier) pour l'arc (I, f) si, et seulement si, le point (u_0, M_0) est régulier (resp. birégulier) pour l'arc (J, g) .

35.3 Si $([a, b], f)$ est un arc régulier de classe $\mathcal{C}^1$ et si (J, g) est un arc $\mathcal{C}^1$ -équivalent à $([a, b], f)$, alors les longueurs des deux arcs sont égales.

35.4 Le vecteur unitaire tangent (resp. normal) de (I, f) à l'instant t_0 et le vecteur unitaire tangent (resp. normal) de (J, g) à l'instant u_0 sont égaux si φ est strictement croissant et opposés si φ est strictement décroissant.

35.5 La courbure en (t_0, M_0) de l'arc (I, f) et la courbure en (u_0, M_0) de l'arc (J, g) sont égales lorsque φ est strictement croissant et opposées lorsque φ est strictement décroissant.

Le centre de courbure de (I, f) à l'instant t_0 et le centre de courbure de (J, g) à l'instant u_0 sont égaux.

IV.2 Orientation d'un arc

36. $\nRightarrow$ Soient (I, f) et (J, g) , deux arcs $\mathcal{C}^k$ -équivalents et $\varphi : J \rightarrow I$, un changement de paramétrage admissible.

Les deux arcs (I, f) et (J, g) sont **de même sens** lorsque φ est strictement croissant et **de sens contraires** lorsque φ est strictement décroissant.

37. S'il existe un changement de paramétrage admissible strictement décroissant $\varphi_0 : I \rightarrow I$ tel que $f \circ \varphi_0 = f$, alors l'arc (I, f) n'est pas régulier.

IV.3 Paramétrages normaux

38. $\nRightarrow$ L'arc paramétré (I, f) est un **paramétrage normal** de son support lorsque $f'(t)$ est un vecteur unitaire pour tout $t \in I$.

IV

Changements de paramétrage

39. On suppose que (I, f) est un paramétrage normal.

39.1 Pour tout $t \in I$, on a $V(t) = T(t)$,

$$A(t) = \frac{dT(t)}{dt} = \gamma(t) \cdot N(t) \quad \text{et} \quad \frac{dN(t)}{dt} = -\gamma(t) \cdot T(t).$$

39.2 Toute abscisse curviligne est de la forme $s(t) = t + K$.

39.3 L'accélération tangentielle est identiquement nulle.

IV.4 Paramétrages intrinsèques

40. Jusqu'ici, le paramètre a été interprété comme une variable temporelle (interprétation cinématique des arcs en coordonnées cartésiennes) ou comme une grandeur géométrique indépendante (arcs en coordonnées polaires).

Nous allons voir deux autres manières de décrire un arc au moyen d'un paramètre géométrique propre au support.

41. Par l'abscisse curviligne

On considère un arc régulier (I, f) de classe $\mathcal{C}^1$ et on note s , une abscisse curviligne.

41.1 L'abscisse curviligne s est un changement de paramétrage admissible de classe $\mathcal{C}^1$.

41.2 On note J , l'image de l'intervalle I par s , qui est un intervalle, et on définit $g : J \rightarrow E$ par

$$\forall t \in I, \quad g(s(t)) = f(t).$$

On considère g comme une fonction de la variable s .

L'arc paramétré (J, g) est un paramétrage normal de même sens que (I, f) .

41.3

$$\frac{dOM}{ds} = T, \quad \frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha$$

41.4

$$\gamma = \frac{d\alpha}{ds}, \quad ds = \frac{1}{\gamma} d\alpha$$

41.5 Relations de Frenet

$$\frac{dT}{ds} = \gamma \cdot N, \quad \frac{dN}{ds} = -\gamma \cdot T.$$

42. Par l'argument du vecteur unitaire tangent

Soit (I, f) , un arc birégulier de classe $\mathcal{C}^2$. On note α , une détermination de classe $\mathcal{C}^1$ de l'argument de $T : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. →[25.3]

42.1

$$\forall t \in I, \quad \alpha'(t) = \frac{\text{Det}(V(t), A(t))}{\|V(t)\|^2}$$

42.2 L'application α est un changement de paramétrage admissible normal pour les arcs paramétrés (I, T) et (I, N) .

42.3

$$\frac{dT}{d\alpha} = N, \quad \frac{dN}{d\alpha} = -T$$

Entraînement

43. Questions pour réfléchir

- Deux arcs de même support sont-ils $\mathcal{C}^k$ -équivalents?
- Suite de [35] – On suppose que (t_0, M_0) est un point birégulier de (I, f) . Comparer l'orientation des bases

$$(f'(t_0), f''(t_0)) \quad \text{et} \quad (g'(u_0), g''(u_0)).$$

- Suite de [35] – On suppose qu'il existe un entier $q \geq 2$ tel que

$$f'(t_0) = \dots = f^{(q-1)}(t_0) = \mathbf{0}_E \neq f^{(q)}(t_0).$$

Alors

$$g'(u_0) = \dots = g^{(q-1)}(u_0) = \mathbf{0}_E \neq g^{(q)}(u_0)$$

et les vecteurs $f^{(q)}(t_0)$ et $g^{(q)}(u_0)$ sont proportionnels. Interprétation géométrique?

- Si l'accélération tangentielle est identiquement nulle, l'arc (I, f) est-il un paramétrage normal?

44. Courbe de courbure imposée

On cherche les courbes dont la courbure est une fonction, arbitrairement choisie, d'un paramètre géométrique (abscisse curviligne ou argument du vecteur unitaire tangente).

44.1 Soit $c : I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue. On cherche un paramétrage normal (I, f) de classe $\mathcal{C}^2$ tel que, pour tout $s \in I$, la courbure $\gamma(s)$ soit égale à $c(s)$.

- Si (I, f) est paramétrage normal de classe $\mathcal{C}^2$, alors il existe une fonction $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$f(s) = f(s_0) + \int_{s_0}^s (\cos \alpha(u), \sin \alpha(u)) du$$

pour tout couple $(s_0, s) \in I \times I$.

- Quels que soient s_0 et s dans I ,

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \int_{s_0}^s c(u) du.$$

- En déduire les paramétrages normaux (I, f) de classe $\mathcal{C}^2$ tels que $\gamma(s) = c(s)$ pour tout $s \in I$. Comparer leurs supports.

44.2 Soit $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On cherche un paramétrage (I, f) de classe $\mathcal{C}^2$ et birégulier tel que, pour tout $\alpha \in I$, le vecteur unitaire tangent $T(\alpha)$ soit égal à $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ et le rayon de courbure $R(\alpha)$ soit égal à $\rho(\alpha)$.

- Si un tel paramétrage existe, alors il existe $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telle que

$$V(\alpha) = \varphi(\alpha) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha) \\ \text{et} \quad A(\alpha) = \varphi'(\alpha) \cdot T(\alpha) + \varphi(\alpha) \cdot N(\alpha).$$

Comparer φ à ρ .

- Pour tout $\alpha \in I$,

$$f(\alpha) = f(\alpha_0) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \rho(\theta) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) d\theta.$$

Interpréter géométriquement.

V

Étude pratique des courbes

V.1 Symétries

45. Le groupe affine $\text{GA}(\mathcal{E})$ est l'ensemble des transformations affines : une application σ est une transformation affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ dirigé par E si, et seulement si, il existe un automorphisme $s \in \text{GL}(E)$ tel que

$$\forall (M, N) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}, \quad \sigma(N) = \sigma(M) + s(MN).$$

- S'il existe une transformation $\sigma \in \text{GA}(\mathcal{E})$ telle que

$$\forall t \in I, \exists t' \in I, \quad f(t') = \sigma(f(t))$$

alors la courbe Γ est stable par σ au sens où $\sigma_*(\Gamma) \subset \Gamma$.

Si la courbe Γ est stable par σ et par σ^{-1} , alors elle est invariante par σ au sens où $\sigma_*(\Gamma) = \Gamma$.

47. Certaines symétries permettent de réduire l'intervalle d'étude de l'arc.

47.1 Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que I est invariant par translation et qu'il existe $\sigma \in \text{GA}(\mathcal{E})$ tel que

$$\forall t \in I, \quad f(t_0 + t) = \sigma(f(t)).$$

Alors

$$\Gamma = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_*^k(\Gamma_0)$$

où Γ_0 est le support de l'arc (I_0, f) , où I_0 est un sous-intervalle de longueur t_0 de I .

47.2 On suppose que $I = I_- \cup I_+$ est centré en t_0 :

$$\forall h \in \mathbb{R}_+, \quad t_0 + h \in I_+ \iff t_0 - h \in I_-.$$

S'il existe $\sigma \in \text{GA}(\mathcal{E})$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}_+, \quad \sigma_*(f(t_0 + h)) = f(t_0 - h),$$

alors

$$\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_+ = \sigma_*(\Gamma_+) \cup \Gamma_+$$

où Γ_- et Γ_+ sont les supports des arcs (I_-, f) et (I_+, f) .

48. Transformations à connaître

Soit $M' = (x', y')$, l'image du point $M = (x, y)$ par la transformation affine σ .

48.1 Symétrie de centre $\Omega = (x_0, y_0)$

$$\left(\frac{x + x'}{2}, \frac{y + y'}{2} \right) = (x_0, y_0)$$

48.2 Symétrie d'axe $[x = a]$

$$\frac{x + x'}{2} = a \quad \text{et} \quad y' = y$$

48.3 Symétrie d'axe $[y = b]$

$$x = x' \quad \text{et} \quad \frac{y + y'}{2} = b$$

48.4 Symétrie d'axe $[y = x]$

$$(x', y') = (y, x)$$

48.5 Symétrie d'axe $[y = -x]$

$$(x', y') = (-y, -x)$$

48.6 Rotation d'angle θ autour de $\Omega = (x_0, y_0)$

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

où $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ et $\omega = x_0 + iy_0$.

49. Exemples

49.1 Le support de l'arc paramétré par

$$f(t) = \left(\frac{t-1}{t}, \frac{t^2}{t+1} \right)$$

admet la droite $x = 3/2$ pour axe de symétrie : pour tout $t \neq -1$,

$$x\left(\frac{-t}{t+1}\right) + x(t) = 3 \quad \text{et} \quad y\left(\frac{-t}{t+1}\right) = y(t).$$

49.2 La lemniscate [108] admet l'origine pour centre de symétrie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(-t) = -f(t).$$

49.3 Le folium [110] et la lemniscate [108] sont invariants par la symétrie d'axe $[y = x]$:

$$\forall t \neq 0, \quad x(1/t) = y(t) \quad \text{et} \quad y(1/t) = x(t).$$

49.4 Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t + 2\pi) = f(t) + (2\pi, 0) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(2\pi - t) + x(t) = 2\pi \\ y(2\pi - t) = y(t) \end{cases}$$

donc la cycloïde [101] est invariante par la translation de vecteur $(2\pi, 0)$ et admet la droite $[x = \pi]$ pour axe de symétrie.

49.5 Si $z(t) = x(t) + iy(t)$ est la version complexe du paramétrage de la deltoïde [109], alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t + 2\pi/3) = e^{2i\pi/3}z(t).$$

La deltoïde est donc invariante par la rotation d'angle $2\pi/3$ autour de l'origine.

49.6 De même, l'hypocycloïde à cinq rebroussements [114] est invariante par la rotation d'angle $2\pi/5$ autour de l'origine :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t + 2\pi/5) = e^{2i\pi/5}z(t).$$

V.2 Paramétrage cartésien

50. On étudie un arc paramétré (I, f) où le paramétrage f est défini par

$$\forall t \in I, \quad f(t) = (x(t), y(t)).$$

Le support de cet arc est noté Γ .

51. Exemples de symétries

51.1 Si x et y sont impaires, alors le support Γ admet l'origine pour centre de symétrie.

51.2 Si x est paire et y est impaire, alors le support Γ admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.

51.3 Si x est impaire et y est paire, alors le support Γ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

52. Étude du vecteur vitesse

52.1

$$\forall t \in I, \quad \mathbf{V}(t) = (x'(t), y'(t)) \quad \text{et} \quad \mathbf{A}(t) = (x''(t), y''(t)).$$

Le point (t, M_t) est un point stationnaire si, et seulement si,

$$x'(t) = y'(t) = 0.$$

52.2 On étudie les signes respectifs de $x'(t)$ et de $y'(t)$ pour tracer le tableau de variation du vecteur vitesse en indiquant l'allure de sa direction. Les huit possibilités sont indiquées dans le tableau suivant.

	$x'(t) < 0$	$x'(t) = 0$	$x'(t) > 0$
$y'(t) < 0$			
$y'(t) = 0$		0	
$y'(t) > 0$			

52.3 Les points stationnaires doivent être étudiés avec soin, car ils donnent une forme particulière à la courbe.

Les points en lesquels le vecteur vitesse est parallèle à l'un des axes de coordonnées doivent être placés avec grand soin, car on peut alors tracer précisément le cercle osculateur [31.3].

53. Étude asymptotique

On suppose que $f(t)$ tend vers l'infini au voisinage d'une borne a de I .

53.1 Si le rapport $y(t)/x(t)$ tend vers l'infini, alors le support Γ présente une branche parabolique d'axe (Oy) .

53.2 Si le rapport $y(t)/x(t)$ tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors la droite $y = \ell x$ est une **direction asymptotique**.

53.3 Si $y = \ell x$ est une direction asymptotique et si la différence

$$\Delta(t) = y(t) - \ell x(t)$$

tend vers une limite $c \in \mathbb{R}$, alors la droite $y = \ell x + c$ est une **asymptote** du support.

Si $\Delta(t)$ tend vers l'infini, le support présente une **branche parabolique** dans la direction de la droite $[y = \ell x]$.

53.4 Si la droite $y = \ell x + c$ est une asymptote du support et si l'expression

$$[y(t) - \ell x(t) - c]$$

est positive (resp. négative) lorsque t tend vers a , alors le support est situé localement au-dessus (resp. au-dessous) de son asymptote au voisinage de $t = a$.

54. Calcul de la courbure [29.2]

Pour calculer la courbure en un point régulier, il faut connaître les vecteurs $V(t_0)$ et $A(t_0)$, qui peuvent se déduire des expressions de $x'(t)$, $x''(t)$, $y'(t)$ et $y''(t)$.

Pour calculer la courbure en un point donné, il est souvent préférable de déduire les vecteurs $V(t_0)$ et $A(t_0)$ du développement limité à l'ordre deux de la fonction f au voisinage de t_0 :

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + h \cdot V(t_0) + \frac{h^2}{2} \cdot A(t_0) + o(h^2).$$

55. Recherche de points doubles

Lorsque les composantes de f sont des fonctions rationnelles, on factorise la différence $f(s) - f(t)$ par $(s - t)$, qui n'est pas nul.

55.1 Si un arc paramétré tel que

$$\forall t \in I, \quad x(t) = ty(t)$$

admet un point double $f(s) = f(t)$ (avec $s < t$), alors il faut que $y(s) = y(t) = 0$. → [106], [111], [110]

55.2 Suite de [18] – L'arc paramétré $(\mathbb{R}_+, f)$ n'a pas de point double.

Exemples d'études

56. Le support de l'arc paramétré par

$$f(t) = \left(\frac{t}{1-t^2}, \frac{t^2}{1-t^2} \right)$$

privé de $f(0)$ admet le point $(0, -1/2)$ pour centre de symétrie : pour tout $t \neq 0$,

$$x(1/t) + x(t) = 0 \quad \text{et} \quad y(1/t) + y(t) = -1.$$

L'arc (I, f) admet la droite $[y = -x - 1/2]$ pour asymptote au voisinage de $t = -1$:

$$y(-1+h) + x(-1+h) = -1/2 + \mathcal{O}(h)$$

et la droite $[y = x - 1/2]$ pour asymptote au voisinage de $t = 1$:

$$y(1+h) - x(1+h) = -1/2 + \mathcal{O}(h).$$

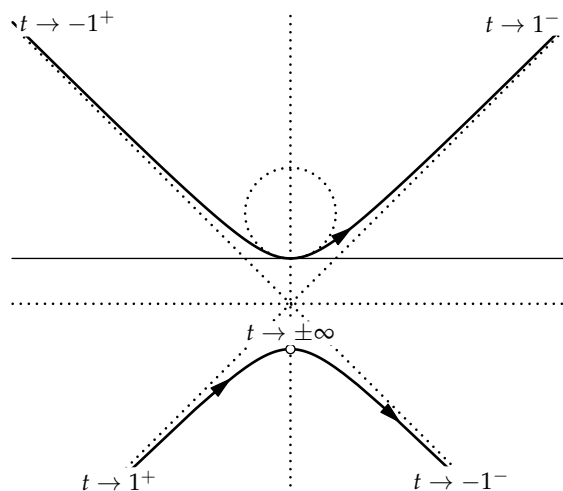
Son support est contenu dans l'hyperbole

$$[(2y+1)^2 - 4x^2 - 1 = 0].$$

Au voisinage de $t = 0$,

$$f(t) = f(0) + t \cdot (1, 0) + \frac{t^2}{2} \cdot (0, 2) + o(t^2)$$

et la courbure est égale à 2.



57. L'arc paramétré défini par

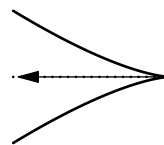
$$f(t) = \left(\frac{1}{\cos t}, \tan t + \sin t \right)$$

admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie. Il suffit de l'étudier sur $I = [0, \pi/2[\cup]\pi/2, \pi]$.

L'arc paramétré (I, f) admet un point stationnaire en $t = \pi$:

$$f(\pi + h) = f(\pi) + \frac{h^2}{2} \cdot (-1, 0) + \frac{h^3}{2} \cdot (0, 1) + o(h^3).$$

Ce point est un point de rebroussement.



L'arc paramétré (I, f) admet la droite $[y = x + 1]$ pour asymptote au voisinage de $\pi/2$:

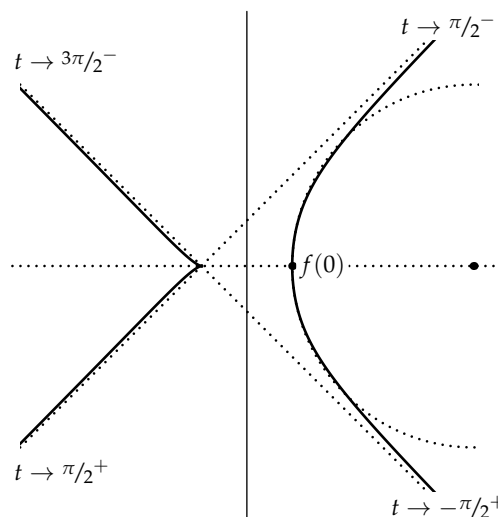
$$y(\pi/2 + h) - [x(\pi/2 + h) + 1] = \mathcal{O}(h)$$

et la droite $[y = -x - 1]$, symétrique de la précédente par rapport à l'axe des abscisses, pour asymptote lorsque le paramètre t tend vers $-\pi/2$.

Au voisinage de $t = 0$,

$$f(h) = f(0) + h \cdot (0, 2) + \frac{h^2}{2} \cdot (1, 0) + o(h^2)$$

donc la courbure en $t = 0$ est égale à $-1/4$.



58. L'arc paramétré défini par

$$f(t) = \left(\sin t, \frac{\cos^2 t}{2 - \cos t} \right)$$

admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie. Il suffit de l'étudier sur le segment $I = [0, \pi]$.

L'arc paramétré (I, f) admet un point stationnaire en $t = \pi/2$:

$$f(\pi/2 + h) = f(\pi/2) + \frac{h^2}{2}(-1, 1) + \frac{h^3}{4}(0, 1) + o(h^3).$$

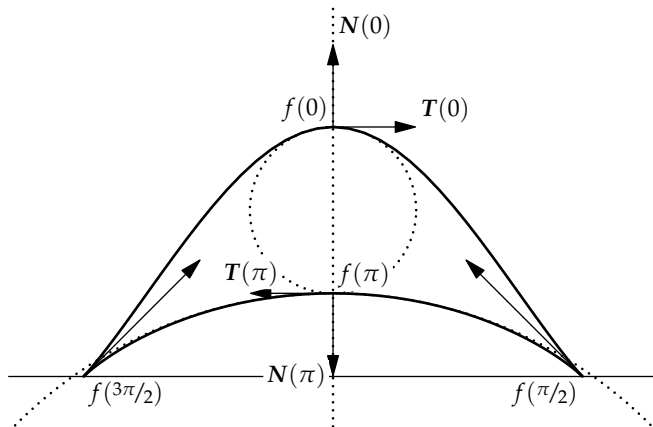
Ce point est un point de rebroussement.

Pour h voisin de 0,

$$f(h) = f(0) + h(1, 0) + \frac{h^2}{2}(0, -3) + o(h^2),$$

$$f(\pi + h) = f(\pi) + h(-1, 0) + \frac{h^2}{2}(0, -5/9) + o(h^2).$$

Le rayon de courbure est égal à $-1/3$ en $t = 0$ et à $9/5$ en $t = \pi$.



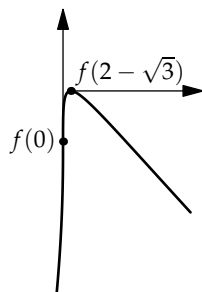
59. L'arc paramétré défini par

$$f(t) = \left(\frac{t^3}{1-t^2}, \frac{t-2}{1-t^2} \right)$$

admet un point stationnaire en $t = 0$:

$$f(t) = f(0) + (t + o(t)) \cdot (0, 1) + (t^3 + o(t^3)) \cdot (1, 0).$$

Ce point est un point d'inflexion.



L'arc (I, f) admet l'axe des abscisses pour asymptote quand t tend vers $\pm\infty$:

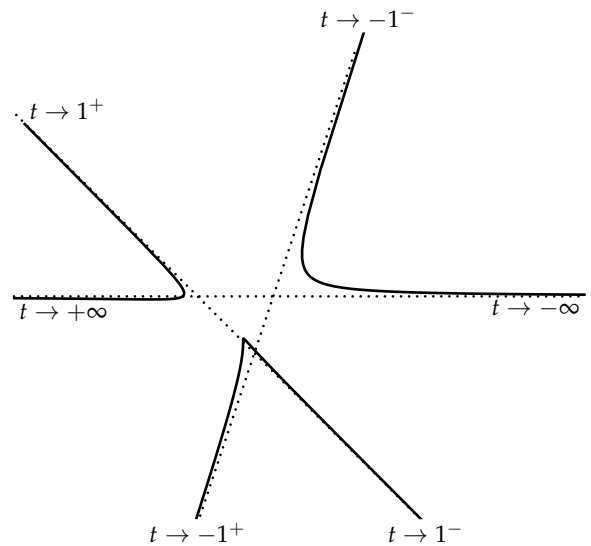
$$y(t) \sim -1/t$$

la droite $[y = 3x - 4]$ pour asymptote au voisinage de $t = -1$:

$$y(-1+h) - 3x(-1+h) = -4 + \mathcal{O}(h)$$

et la droite $[y = -x - 2]$ pour asymptote au voisinage de $t = 1$:

$$y(1+h) + x(1+h) = -2 + \mathcal{O}(h).$$



60. L'arc paramétré défini par

$$f(t) = \left(\frac{t^3}{t^2-9}, \frac{t(t-2)}{t-3} \right)$$

admet un point d'inflexion en $t = 0$:

$$f(t) = \left(\frac{2t}{3} + o(t) \right) \cdot (0, 1) + \left(\frac{-t^3}{27} + o(t^3) \right) \cdot (3, 1)$$

L'arc admet la droite $[y = x + 1]$ pour asymptote lorsque t tend vers $\pm\infty$:

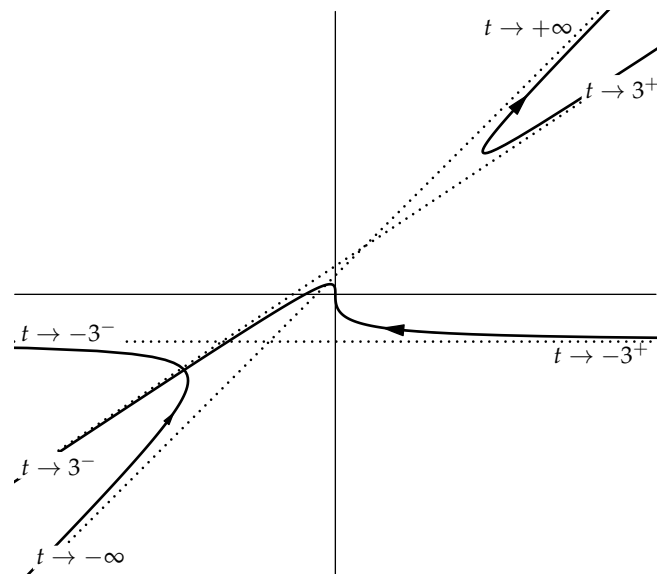
$$y(t) - x(t) = 1 + \mathcal{O}(1/t)$$

la droite $[y = -5/2]$ pour asymptote lorsque $t \rightarrow -3$:

$$y(t) = \frac{-5}{2} + \frac{11}{2}(t+3) + o(t+3)$$

et la droite $[-4x + 6y = 9]$ pour asymptote lorsque $t \rightarrow 3$:

$$y(t) - \frac{2}{3}x(t) = \frac{3}{2} + \frac{5}{12}(t-3) + o(t-3).$$



61. L'arc paramétré défini par

$$f(t) = \left(t^2 + \frac{2}{t}, t^2 + \frac{1}{t^2}\right)$$

admet un point stationnaire pour $t = 1$:

$$f(1+h) = f(1) + h^2(3, 4) + h^3(-2, -4) + o(h^3).$$

Ce point est un point de rebroussement.

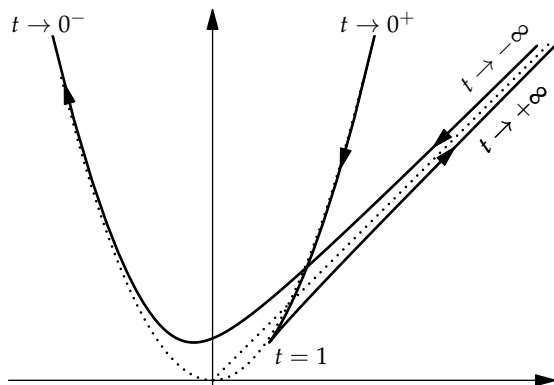
L'arc paramétré $(\mathbb{R}^*, f)$ admet la droite $[y = x]$ pour asymptote lorsque t tend vers $\pm\infty$:

$$y(t) - x(t) = \mathcal{O}(1/t)$$

et la parabole $[4y = x^2]$ pour courbe asymptote lorsque $t \rightarrow 0$:

$$4y(t) - x^2(t) = \mathcal{O}(t).$$

Cet arc admet $(5, 6) = f(-1 - \sqrt{2}) = f(-1 + \sqrt{2})$ pour unique point double.



62. L'arc paramétré défini par

$$f(t) = (\tan t/2 + \cos t, 1 - \sin t)$$

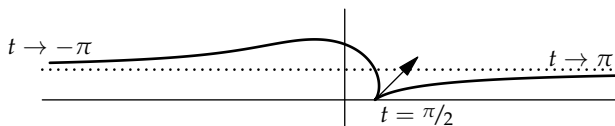
admet un point stationnaire en $t = \pi/2$:

$$f(\pi/2 + h) = f(\pi/2) + \frac{h^2}{2} \cdot (1, 1) + \frac{h^3}{2} \cdot (-1, 0) + o(h^3).$$

Ce point est un point de rebroussement.

L'arc paramétré $(]-\pi, \pi[, f)$ admet la droite $[y = 1]$ pour asymptote au voisinage de $t = \pm\pi$:

$$y(t) = 1 + (t \mp \pi) + o(t \mp \pi).$$



63. L'arc paramétré défini par

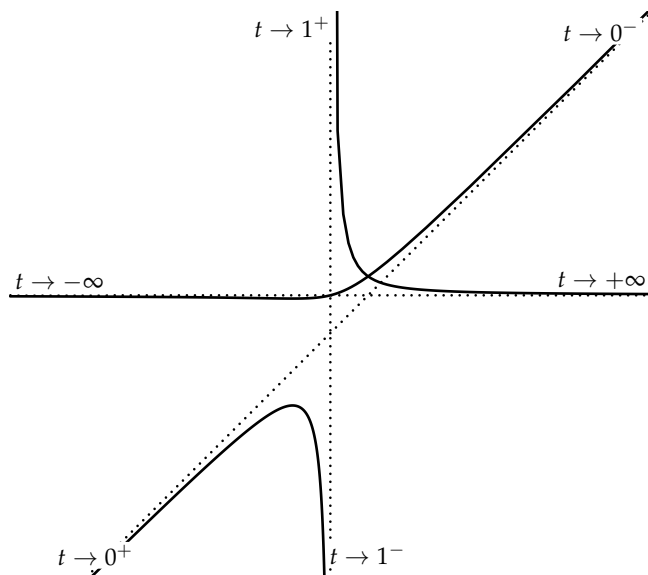
$$f(t) = \left(\frac{t^2-1}{t}, \frac{t+1}{t(t-1)}\right)$$

admet pour asymptotes : l'axe des abscisses lorsque t tend vers $\pm\infty$; la droite $[y = x - 2]$ lorsque t tend vers 0 :

$$y(t) = x(t) - 2 + \mathcal{O}(t)$$

et l'axe des ordonnées lorsque t tend vers 1.

Cet arc admet $(2, 1) = f(1 - \sqrt{2}) = f(1 + \sqrt{2})$ pour unique point double.



64. L'arc paramétré défini par

$$f(t) = \left(\frac{3t^2-1}{t(t^2-1)}, \frac{3t-1}{t^2-1}\right)$$

admet la droite $[y = 2x + 5/2]$ pour asymptote au voisinage de $t = -1$:

$$y(-1+h) = 2x(-1+h) + 5/2 + \mathcal{O}(h)$$

la droite $[y = 1]$ pour asymptote au voisinage de $t = 0$:

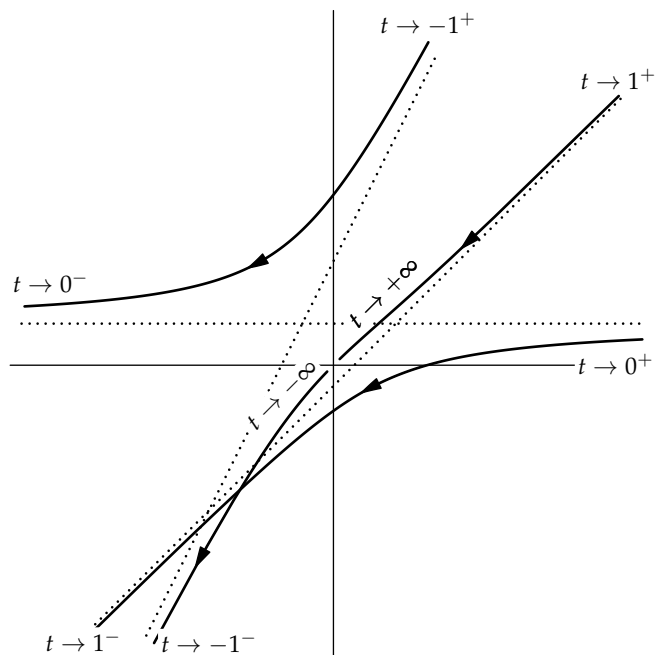
$$y(t) = 1 - 3t + \mathcal{O}(t^2)$$

et la droite $[y = x - 1/2]$ pour asymptote au voisinage de $t = 1$:

$$y(1+h) = x(1+h) - 1/2 + \mathcal{O}(h).$$

Il admet l'origine pour point limite quand t tend vers $\pm\infty$ et tend vers l'origine tangentiellement à la droite $[y = x]$:

$$y(t) - x(t) \sim -1/t^2.$$



65. L'arc paramétré défini par

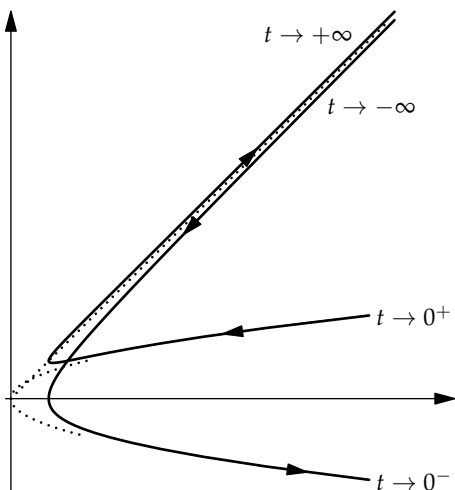
$$f(t) = \left(t^2 + \frac{1}{t^2}, t^2 + \frac{1}{t} \right)$$

admet la droite $[y = x]$ pour asymptote lorsque $t \rightarrow \pm\infty$:

$$y(t) - x(t) = \mathcal{O}(1/t)$$

et la parabole $[y^2 = x]$ pour courbe asymptote lorsque $t \rightarrow 0$:

$$y^2(t) - x(t) = \mathcal{O}(t).$$



L'arc paramétré $(\mathbb{R}^*, f)$ admet un point double :

$$(3, 2) = f\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right).$$

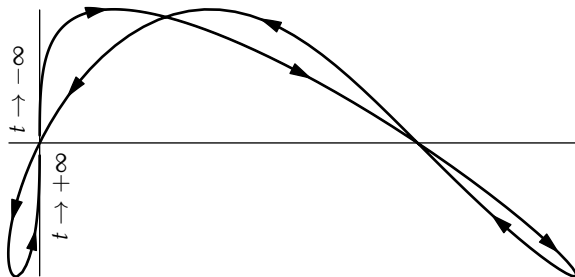
66. Le support de l'arc paramétré défini par

$$f(t) = \left(\frac{1-t}{1+t^4}, \frac{t(1-t^2)}{1+t^4} \right)$$

admet l'origine pour point-limite et tend vers l'origine tangentiellement à l'axe des ordonnées :

$$x(t) \sim \frac{-1}{t^3}, \quad y(t) \sim \frac{-1}{t} \quad \text{et} \quad y^3(t) - x(t) \sim \frac{1}{t^4}$$

lorsque t tend vers $\pm\infty$.



V.3 Paramétrage polaire

67. Repère polaire

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$u_r(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{et} \quad u_\theta(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta).$$

67.1 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\frac{du_r(\theta)}{d\theta} = u_\theta(\theta) \quad \text{et} \quad \frac{du_\theta(\theta)}{d\theta} = -u_r(\theta).$$

67.2 Quels que soient les angles θ et h ,

$$u_r(\theta + h) = \cos h \cdot u_r(\theta) + \sin h \cdot u_\theta(\theta).$$

68. On étudie un arc paramétré (I, f) où le paramétrage f est défini par

$$\forall \theta \in I, \quad f(\theta) = \rho(\theta) \cdot u_r(\theta).$$

Contrairement aux paramétrages cartésiens, le paramètre a ici une signification géométrique visible : c'est une mesure de l'angle du vecteur position avec une droite fixe.

69. On peut se ramener au cas d'un paramétrage cartésien :

$$f(\theta) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta)$$

mais c'est en général inutile.

70. **Signe de ρ et répartition angulaire**

On étudie le signe de $\rho(\theta)$ en fonction de θ et on en déduit dans quels secteurs angulaires le point varie.

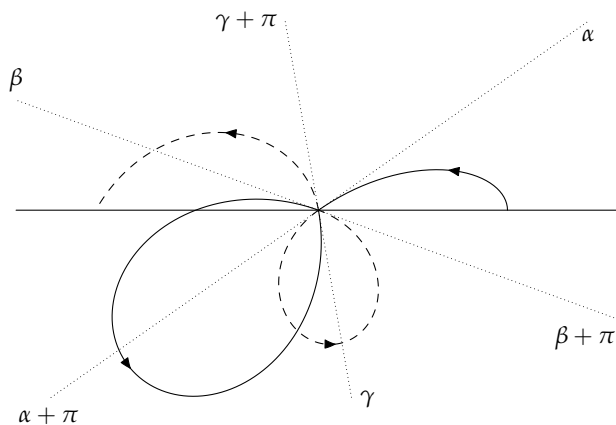
70.1 Prenons comme exemple le tableau de signes suivant.

θ	0	α	β	γ	2π
$\rho(\theta)$	+	0	-	0	-

Ce tableau de signes se traduit par le tableau suivant et donne une indication précise de l'allure générale du support.

Secteur angulaire contenant $M(\theta)$	
$\theta \in [0, \alpha]$	$[0 \leq \theta \leq \alpha]$
$\theta \in [\alpha, \beta]$	$[\alpha + \pi \leq \theta \leq \beta + \pi]$
$\theta \in [\beta, \gamma]$	$[\beta \leq \theta \leq \gamma]$
$\theta \in [\gamma, 2\pi]$	$[\gamma + \pi \leq \theta \leq 3\pi]$

70.2 La courbe est tracée en trait continu pour $\rho(\theta) \geq 0$ et en trait discontinu pour $\rho(\theta) \leq 0$.



71. **Exemples de symétrie**

71.1 Si ρ est une fonction périodique de période T , alors le support de l'arc est invariant par la rotation d'angle T .

71.2 Si la fonction ρ est paire, alors le support Γ admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.

71.3 Si la fonction ρ est impaire, alors le support Γ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

72. **Tangente à l'origine**

72.1 Pour tout $\theta \in I$,

$$V(\theta) = \rho'(\theta) \cdot u_r(\theta) + \rho(\theta) \cdot u_\theta(\theta)$$

$$A(\theta) = [\rho''(\theta) - \rho(\theta)] \cdot u_r(\theta) + 2\rho'(\theta) \cdot u_\theta(\theta)$$

72.2 Le point (θ_0, M_0) est un point stationnaire si, et seulement si,

$$\rho(\theta) = \rho'(\theta) = 0.$$

72.3 ▷ Pour un arc paramétré en coordonnées polaires [68], seule l'origine peut être un point stationnaire.

72.4 S'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $\rho(\theta_0 + h) \sim a_p h^p$ quand h tend vers 0, alors [76.1]

$$f(\theta_0 + h) = [a_p h^p + o(h^p)] \cdot \mathbf{u}_r(\theta_0) + [a_p h^{p+1} + o(h^{p+1})] \cdot \mathbf{u}_\theta(\theta_0)$$

et le support admet la droite $[\theta = \theta_0]$ pour tangente à l'origine.

Si p est impair, le support ne traverse pas la tangente et, visuellement, on ne peut pas distinguer ce point stationnaire d'un point régulier.

Si p est pair, le support traverse la tangente et présente un point de rebroussement.

73. Calculs de courbure

On se place en un point régulier [72.2] où la tangente au support, qui est aussi la tangente au cercle osculateur [31.3], est facile à tracer avec précision.

73.1 Si $\rho(\theta) = 0$, alors la tangente est en général connue [72.4] et la courbure est égale à $2/\rho'(\theta)$.

73.2 Si $\rho'(\theta) = 0$, alors la tangente est dirigée par $\mathbf{u}_\theta(\theta)$ et la courbure est égale à

$$\frac{1}{|\rho(\theta)|} \left(1 - \frac{\rho''(\theta)}{\rho(\theta)} \right).$$

74. Recherche de points doubles

74.1 L'origine O est un point multiple lorsqu'il existe au moins deux valeurs $\theta_1 < \theta_2$ telles que $\rho(\theta_1) = \rho(\theta_2) = 0$.

74.2 Un point $M_0 \neq O$ est un point double si, et seulement si, il existe deux réels $\theta_1 < \theta_2$ tels que :

- Ou bien $\theta_2 = \theta_1 \pmod{2\pi}$ et $\rho(\theta_1) = \rho(\theta_2)$;
- Ou bien $\theta_2 = \theta_1 + \pi \pmod{2\pi}$ et $\rho(\theta_1) = -\rho(\theta_2)$.

Études asymptotiques

75. On suppose que θ tend vers l'infini. Si $|\rho(\theta)|$ tend

75.1 vers l'infini, le support est une **spirale divergente**;

75.2 vers 0, le support est une **spirale convergente**;

75.3 vers un réel $r_0 > 0$, le support admet le cercle de centre O et de rayon r_0 pour **cercle asymptote**.

76. On suppose que $\rho(\theta)$ tend vers l'infini lorsque θ tend vers $\theta_0 \in \mathbb{R}$. On évalue dans ce cas les coordonnées du point M_θ dans le **repère asymptotique**

$$(O, \mathbf{u}_r(\theta_0), \mathbf{u}_\theta(\theta_0)).$$

76.1 Pour tout h ,

$$f(\theta_0 + h) = X(h) \cdot \mathbf{u}_r(\theta_0) + Y(h) \cdot \mathbf{u}_\theta(\theta_0)$$

où

$$X(h) = \rho(\theta_0 + h) \cos h \quad \text{et} \quad Y(h) = \rho(\theta_0 + h) \sin h.$$

L'ordonnée $Y(\theta)$ est une forme indéterminée.

L'abscisse $X(\theta)$ tend vers l'infini et $Y(\theta)/X(\theta)$ tend vers 0 lorsque θ tend vers θ_0 .

76.2 Si $Y(\theta)$ tend vers l'infini, alors le support présente une **branche parabolique** dans la direction $\theta = \theta_0$.

76.3 Si $Y(\theta)$ tend vers α , alors la droite $[Y = \alpha]$ est une **droite asymptote** au support de l'arc.

76.4 L'asymptote $[Y = \alpha]$ admet pour **équation normale** :

$$[-x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0 = \alpha].$$

Exemples d'études

77. L'arc paramétré par

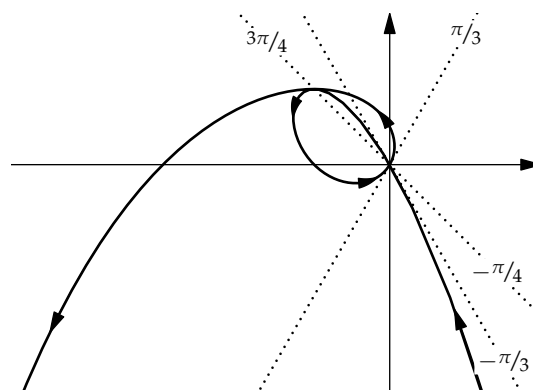
$$\forall -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}, \quad \rho(\theta) = \frac{1 - 2 \cos \theta}{1 + \sin \theta}$$

admet $[\theta = -\pi/2]$ pour direction asymptotique. Comme

$$\rho(-\pi/2 + h) \sim 2/h,$$

le support présente deux branches paraboliques.

L'arc admet deux points doubles : l'origine et le point associé aux angles $\theta = \pi/4$ et $\theta = 3\pi/4$.



78. La courbe paramétrée par

$$\rho(\theta) = 1 + 2 \cos 2\theta$$

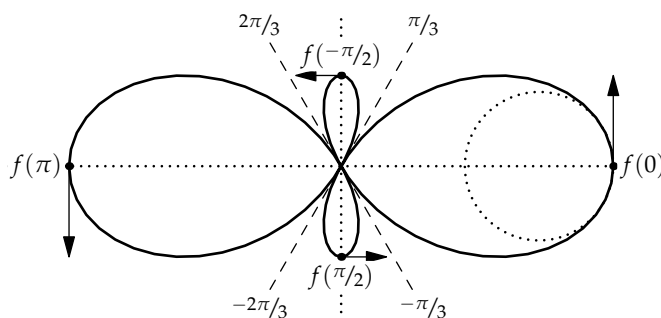
admet l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées pour axes de symétrie.

La fonction ρ est positive sur $[0, \pi/3]$ et négative sur $[\pi/3, \pi/2]$.

Pour h voisin de 0,

$$\begin{cases} \rho(h) = 3 - 4h^2 + o(h^2) \\ \rho(\pi/2 + h) = -1 + 4h^2 + o(h^2) \end{cases}$$

donc le rayon de courbure au point $f(0)$ est égal à $9/11$ et le rayon de courbure au point $f(\pi/2)$ est égal à $1/9$.



79. La courbe paramétrée par

$$\rho(\theta) = \cos^3 \frac{\theta}{3}$$

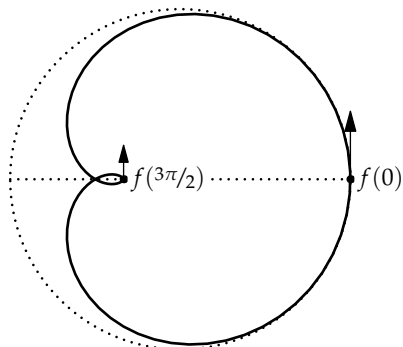
admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie. Comme la fonction ρ admet 3π pour antipériode, il suffit de l'étudier sur $[0, 3\pi/2]$, intervalle sur lequel elle est positive et décroissante. Comme $\rho(2\pi) = -\rho(\pi)$, le point $f(\pi)$ est un point double. L'origine $O = f(3\pi/2)$ est un point stationnaire :

$$\rho(3\pi/2 + h) \sim \frac{h^3}{27}.$$

Pour θ voisin de 0,

$$\rho(\theta) = 1 - h^2/6 + o(h^2)$$

donc le rayon de courbure en $f(0)$ est égal à $3/4$.



80. La courbe paramétrée par

$$\rho(\theta) = 1 - \cos 3\theta$$

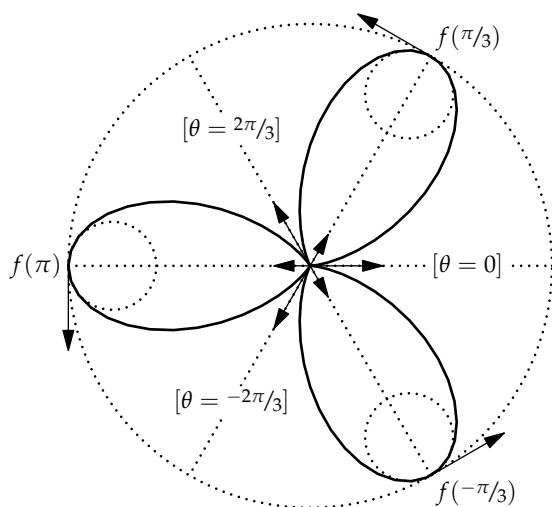
admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie et est invariante par la rotation d'angle $2\pi/3$ autour de l'origine. Pour h voisin de 0,

$$\rho(\pi + h) = 2 - \frac{9}{2}h^2 + o(h^2)$$

donc le rayon de courbure en $f(\pi)$ est égal à $4/11$. Pour θ voisin de 0,

$$\rho(\theta) \sim \frac{9}{2}\theta^2$$

donc l'origine est un point de rebroussement.



81. La courbe paramétrée par

$$\rho(\theta) = \cos^2 \theta$$

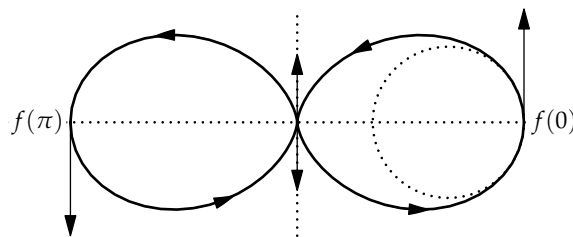
admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie. L'axe des ordonnées est un axe de symétrie car $\rho(\pi - \theta) = \rho(\theta)$. Pour θ voisin de 0,

$$\rho(\theta) = 1 - \theta^2 + o(\theta^2)$$

donc le rayon de courbure en $f(0)$ est égal à $1/3$. Pour h voisin de 0,

$$\rho(\pi/2 + h) \sim h^2$$

donc l'origine est un point de rebroussement.



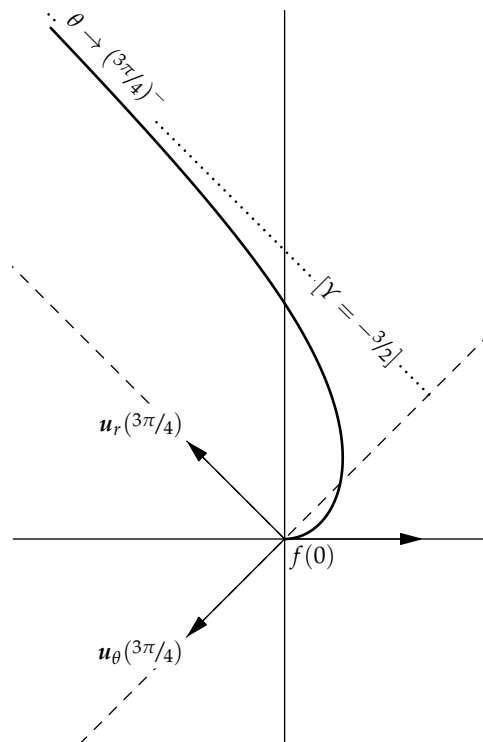
82. La fonction ρ définie par

$$\rho(\theta) = \tan \frac{2\theta}{3}$$

est impaire et admet $3\pi/2$ pour plus petite période strictement positive. Le support de l'arc paramétré est donc invariant par la rotation d'angle $\pi/2$ autour de l'origine et par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Il suffit d'étudier ρ sur l'intervalle $[0, 3\pi/4[$ sur lequel elle est positive et croissante.

La direction $[\theta = 3\pi/4]$ est une direction asymptotique. Dans le repère asymptotique correspondant,

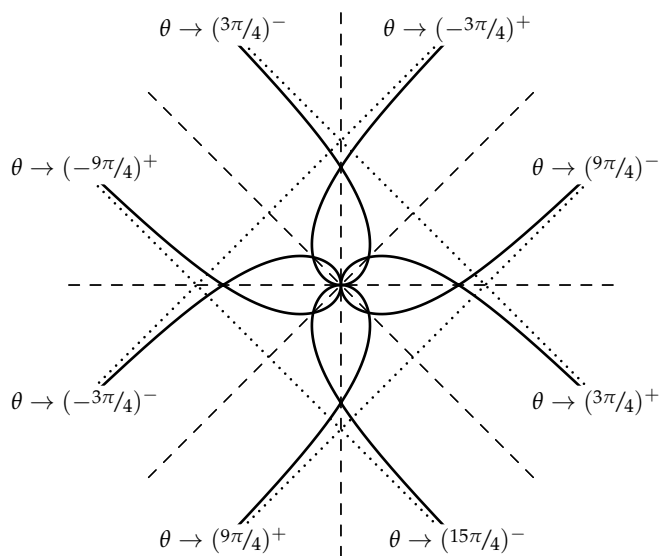
$$X(h) \sim \frac{-3}{2h} \quad \text{et} \quad Y(h) = \frac{-3}{2} + \frac{17}{36}h^2 + o(h^2).$$



Au voisinage de 0,

$$\rho(\theta) = \frac{2}{3}\theta + o(\theta^2)$$

donc le rayon de courbure en $O = f(0)$ est égal à $1/3$.



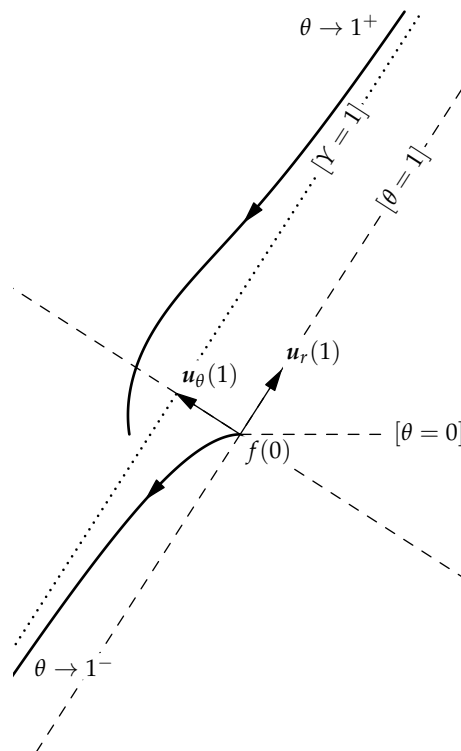
83. La fonction ρ définie par

$$\rho(\theta) = \frac{\theta}{\theta - 1}$$

est négative sur $]0, 1[$ et positive ailleurs.

La direction $[\theta = 1]$ est une direction asymptotique. Dans le repère asymptotique correspondant,

$$X(h) \sim \frac{1}{h} \quad \text{et} \quad Y(h) = 1 + h + o(h).$$

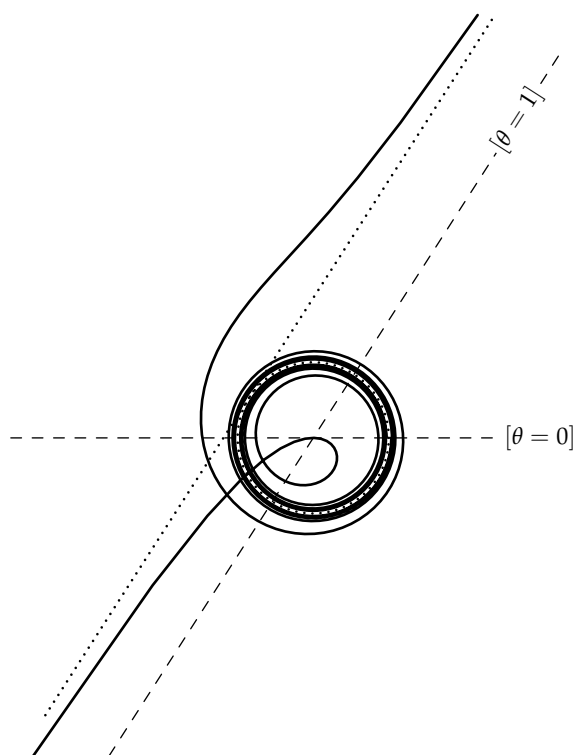


Au voisinage de 0,

$$\rho(\theta) = -\theta - \theta^2 + o(\theta^2)$$

donc le rayon de courbure en $\theta = 0$ est égal à $1/2$.

Au voisinage de $\pm\infty$, la fonction ρ tend vers 1, donc le cercle unité est asymptote à la courbe.



84. La courbe paramétrée par

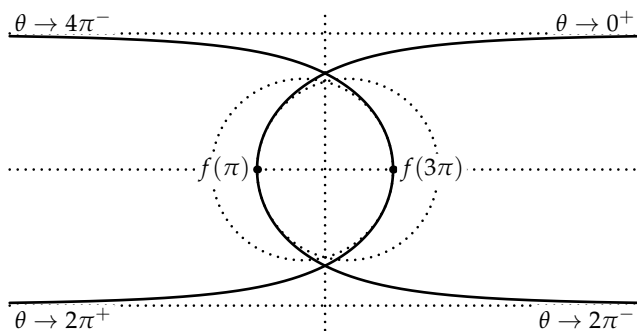
$$\rho(\theta) = \frac{1}{\sin \theta/2}$$

admet l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées pour axes de symétrie. Elle a deux points doubles : $f(\pi/2) = f(7\pi/2)$ et $f(3\pi/2) = f(5\pi/2)$.
Pour h voisin de 0,

$$\rho(\pi + h) = 1 + h^2/8 + o(h^2)$$

donc le rayon de courbure en $f(\pi)$ est égal à $4/3$.
La direction $[\theta = 0]$ est une direction asymptotique. Dans le repère asymptotique correspondant,

$$X(h) \sim \frac{2}{h} \quad \text{et} \quad Y(h) = 2 - \frac{h^2}{4} + o(h^2).$$



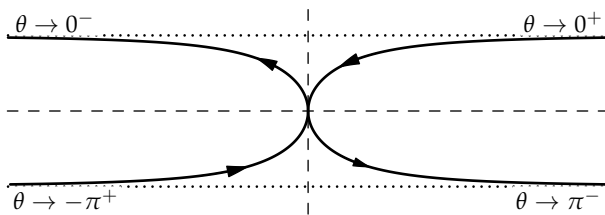
85. La fonction ρ définie par

$$\rho(\theta) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

est impaire et $\rho(\theta + \pi/2) = -\rho(\theta)$, donc l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses sont des axes de symétrie de la courbe paramétrée par ρ . Il suffit d'étudier cette fonction sur l'intervalle $]0, \pi/2]$, sur lequel elle est positive et décroissante.

La direction $[\theta = 0]$ est une direction asymptotique. Dans le repère asymptotique correspondant,

$$X(h) \sim \frac{1}{h} \quad \text{et} \quad Y(h) = 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2).$$



86. La courbe paramétrée par

$$\rho(\theta) = \frac{\cos \theta}{1 - \cos \theta}$$

admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie. La direction $[\theta = 0]$ est une direction asymptotique. Dans le repère asymptotique correspondant,

$$X(h) \sim \frac{2}{h^2} \quad \text{et} \quad Y(h) \sim \frac{2}{h}$$

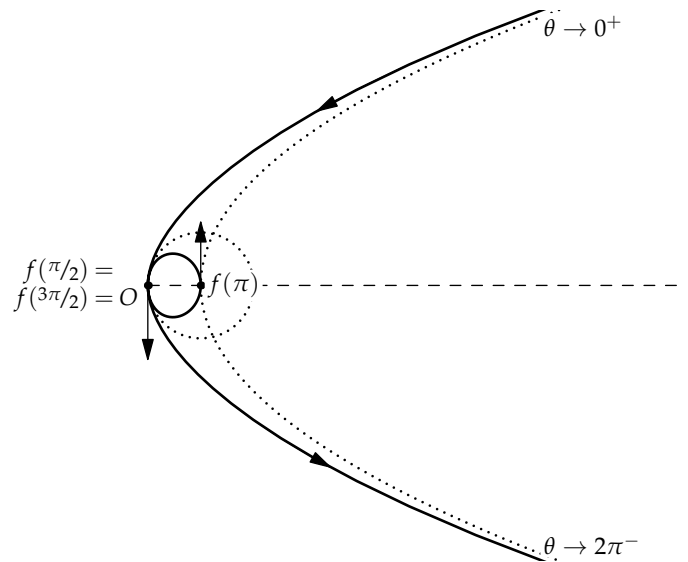
donc la courbe admet une branche parabolique d'axe $[\theta = 0]$. Comme

$$2X(h) - Y^2(h) - 1 = -h^2 + o(h^2),$$

la parabole $[2X - Y^2 = 1]$ est asymptote au graphe. Pour h voisin de 0,

$$\begin{cases} \rho(\pi/2 + h) = -h + h^2 + o(h^2) \\ \rho(\pi + h) = -1/2 + h^2/8 + o(h^2) \end{cases}$$

donc le rayon de courbure en $f(\pi/2) = O$ est égal à $1/2$ et le rayon de courbure en $f(3\pi/2)$ est égal à $1/3$.



87. La courbe paramétrée par

$$\rho(\theta) = \frac{-\cos 2\theta}{1 + 2\sin \theta}$$

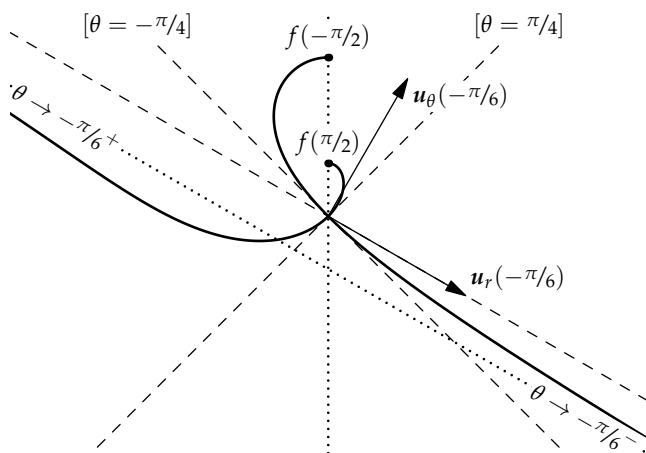
admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie car $\rho(\pi - \theta) = \rho(\theta)$. On étudie $\rho(\theta)$ pour $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

La fonction ρ est positive sur $[-\pi/4, -\pi/6]$ et sur $[\pi/4, \pi/2]$.

L'origine $O = f(-\pi/4) = f(\pi/4)$ est un point multiple.

La direction $[\theta = -\pi/6]$ est une direction asymptotique. Dans le repère asymptotique correspondant,

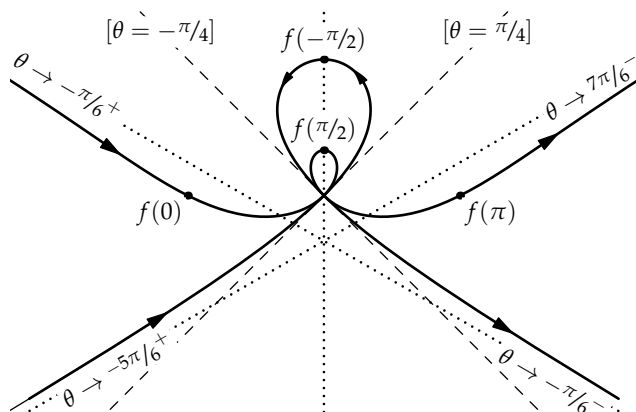
$$X(h) \sim \frac{-1}{2\sqrt{3}h} \quad \text{et} \quad Y(h) = \frac{-1}{2\sqrt{3}} - \frac{11h}{12} + o(h).$$



Pour h voisin de 0,

$$\begin{cases} \rho(-\pi/2 + h) = -1 + h^2 + o(h^2) \\ \rho(\pi/2 + h) = 1/3 - 5/9h^2 + o(h^2) \end{cases}$$

donc le rayon de courbure en $f(-\pi/2)$ est égal à $1/3$ et le rayon de courbure en $f(\pi/2)$ est égal à $1/13$.



88. La courbe paramétrée par

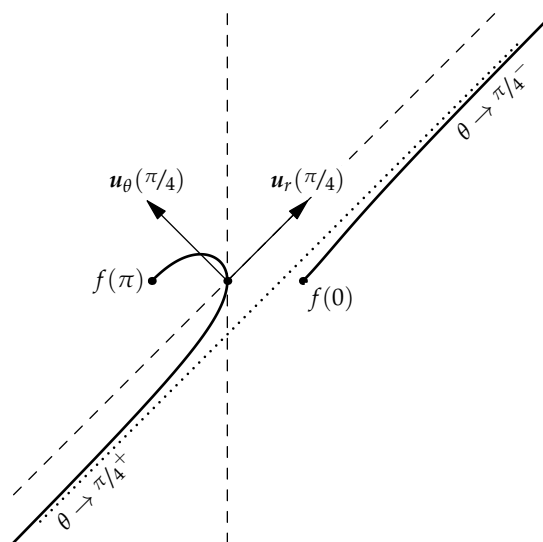
$$\rho(\theta) = \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$$

admet l'origine O pour centre de symétrie car la fonction ρ est π -périodique.

La fonction ρ est positive sur $[0, \pi/4]$ et sur $[\pi/2, \pi]$.

La direction $[\theta = \pi/4]$ est une direction asymptotique. Dans le repère asymptotique correspondant,

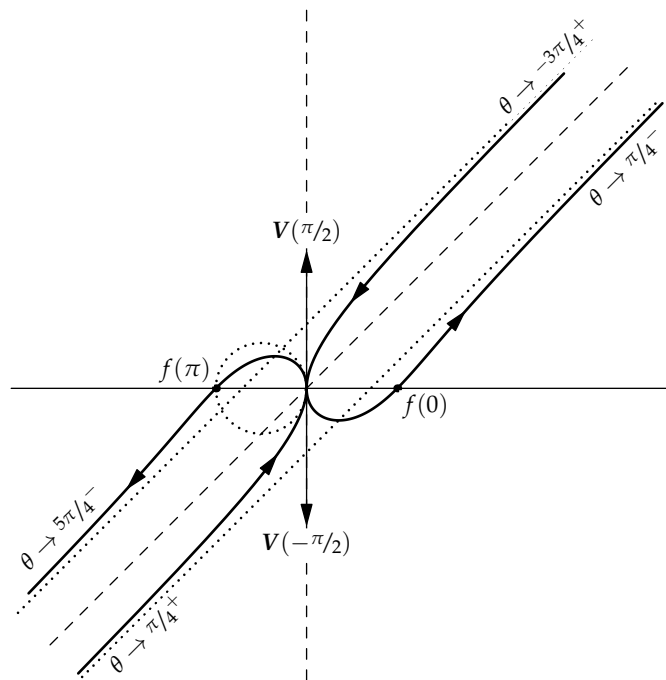
$$X(h) \sim \frac{-1}{2h} \quad \text{et} \quad Y(h) = \frac{-1}{2} + \frac{h}{2} + o(h).$$



Au voisinage de 0,

$$\rho(\pi/2 + h) = h - h^2 + o(h^2)$$

donc le rayon de courbure en $f(\pi) = O$ est égal à $1/2$.



89. La fonction ρ définie par

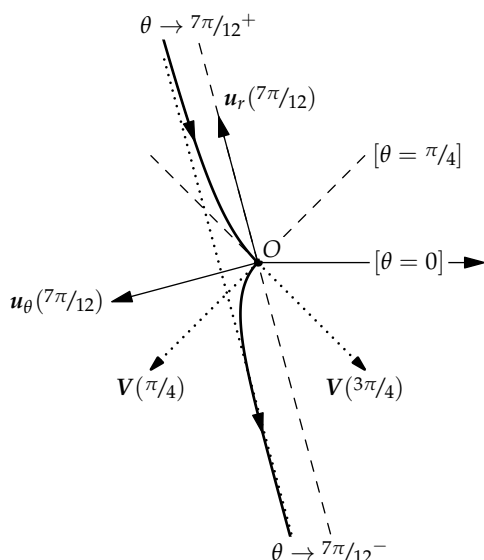
$$\rho(\theta) = \frac{\cos 2\theta}{1 + 2 \sin 2\theta}$$

est π -périodique et $\rho(\pi/2 - \theta) = -\rho(\theta)$. La courbe paramétrée par ρ admet donc l'origine pour centre de symétrie et la droite $[\theta = \pi/4]$ pour axe de symétrie.

Il suffit d'étudier $\rho(\theta)$ pour $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$.

La direction $[\theta = 7\pi/12]$ est une direction asymptotique. Dans le repère asymptotique correspondant,

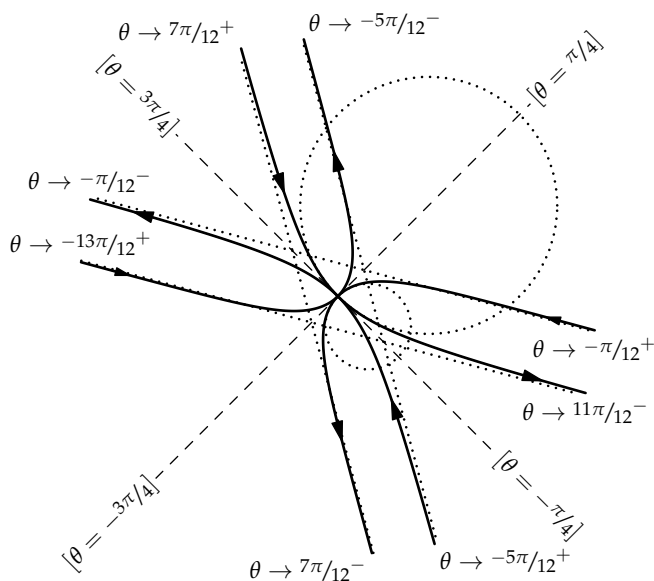
$$X(h) \sim \frac{1}{4h} \quad \text{et} \quad Y(h) = \frac{1}{4} - \frac{h}{4\sqrt{3}} + o(h).$$



Pour h voisin de 0,

$$\rho(\pi/4 + h) = -2/3h + o(h^2) \quad \text{et} \quad \rho(3\pi/4 + h) = -2h + o(h^2)$$

donc le rayon de courbure en $f(\pi/4)$ est égal à $1/3$ et le rayon de courbure en $f(3\pi/4)$ est égal à 1.



90. La courbe paramétrée par

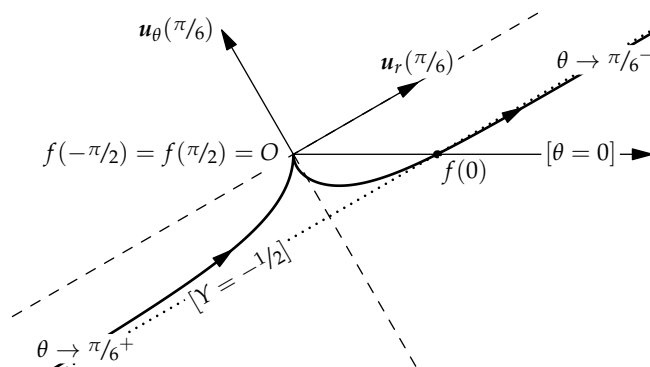
$$\rho(\theta) = \frac{\cos \theta}{1 - 2 \sin \theta}$$

admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie car $\rho(\pi - \theta) = -\rho(\theta)$.

Il suffit d'étudier $\rho(\theta)$ pour $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

La direction $[\theta = \pi/6]$ est une direction asymptotique et dans le repère asymptotique associé,

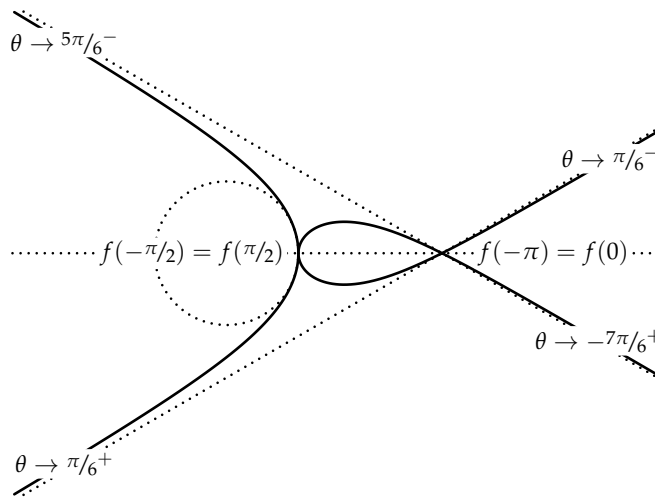
$$X(h) \sim \frac{-1}{2h} \quad \text{et} \quad Y(h) = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}h}{12} + o(h).$$



Au voisinage de 0,

$$\rho(\pi/2 + h) = h + o(h^2) \quad \text{et} \quad \rho(-\pi/2 + h) = h/3 + o(h^2)$$

donc le rayon de courbure en $\theta = \pi/2$ est égal à $1/2$ et le rayon de courbure en $\theta = -\pi/2$ est égal à $1/6$.



91. La courbe paramétrée par

$$\rho(\theta) = \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta}$$

admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

Comme la fonction ρ admet π pour antipériode, il suffit de l'étudier sur $]0, \pi/2]$. Elle est strictement positive sur $]0, \pi/4[$ et strictement négative sur $]\pi/4, \pi/2]$.

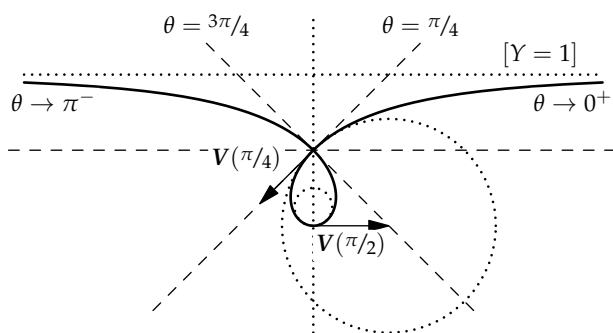
Pour h voisin de 0,

$$\begin{cases} \rho(\pi/4 + h) = -2\sqrt{2}h + 2\sqrt{2}h^2 + o(h^2) \\ \rho(\pi/2 + h) = -1 + 3/2h^2 + o(h^2) \end{cases}$$

donc le rayon de courbure en $f(\pi/4)$ est égal à $\sqrt{2}$ et le rayon de courbure en $f(\pi/2)$ est égal à $1/4$.

La direction $[\theta = 0]$ est une direction asymptotique et dans le repère asymptotique correspondant,

$$X(h) \sim 1/h \quad \text{et} \quad Y(h) = 1 - 2h^2 + o(h^2).$$



92. La courbe paramétrée par

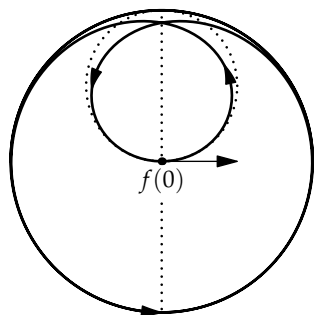
$$\rho(\theta) = \text{th } \theta$$

admet le cercle $[r = 1]$ pour asymptote et l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

Au voisinage de 0,

$$\rho(\theta) = \theta + o(\theta^2)$$

donc le rayon de courbure en $\rho(0)$ est égal à $1/2$.



Entraînement

93. Questions pour réfléchir

1. Suite de [50] – Examiner les symétries du support Γ lorsque :

- 1.a Les deux composantes x et y sont paires ;
- 1.b Les deux composantes x et y ont une période commune ;
- 1.c La composante y est π -antipériodique et

$$x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. Suite de [50] – Si $f(t)$ tend vers l'infini, les deux composantes $x(t)$ et $y(t)$ tendent-elles vers l'infini ?

3. Suite de [68] – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les symétries du support

- 3.a Lorsque la fonction ρ admet $2\pi/n$ pour période ;
- 3.b Lorsqu'elle admet $2n\pi$ pour période.

4. Suite de [68] – Comment traduire géométriquement la propriété $\rho'(\theta) = 0$?

5. Les hypothèses formulées au [14] et au [72.4] sont-elles fréquemment vérifiées ?

6. Suite de [76] – L'approximation

$$Y(\theta) \sim (\theta - \theta_0)\rho(\theta)$$

permet d'identifier une éventuelle asymptote, mais ne permet pas de situer le support par rapport à cette asymptote.

VI.1 Paramétrages cartésiens à connaître

94. La droite issue du point $\Omega = (x_0, y_0)$ et dirigée par le vecteur $u = (u_x, u_y)$ est paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (x_0 + u_x t, y_0 + u_y t).$$

95. Le cercle de centre $\Omega = (x_0, y_0)$ et de rayon r est paramétré par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t).$$

96. L'ellipse d'équation réduite

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (a \cos t, b \sin t).$$

97. L'hyperbole d'équation réduite

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

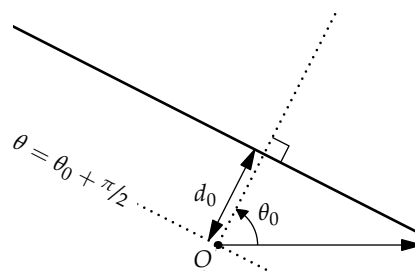
est paramétrée par

$$f(t) = \left(\frac{a}{\cos t}, b \tan t \right).$$

VI.2 Paramétrages polaires à connaître

98. La droite admettant $u_r(\theta_0)$ pour vecteur normal et dont la distance à l'origine est égale à $d_0 > 0$ est paramétrée par

$$\forall \theta \in]\theta_0 - \pi/2, \theta_0 + \pi/2[, \quad \rho(\theta) = \frac{d_0}{\cos(\theta - \theta_0)}.$$

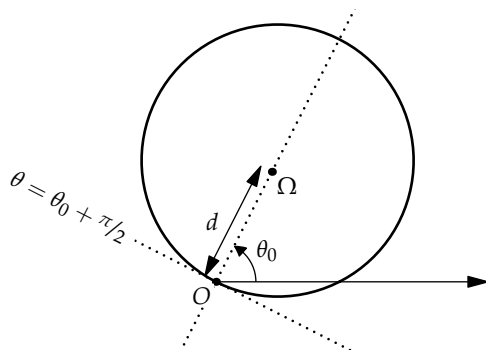


99.1 Le cercle de centre O et de rayon r est paramétré par

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad \rho(\theta) = r.$$

99.2 Si le point Ω est repéré par les coordonnées polaires (r_0, θ_0) , alors le cercle de centre Ω et de rayon r_0 est paramétré par

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad \rho(\theta) = 2r_0 \cos(\theta - \theta_0).$$



100. Coniques

La conique d'excentricité $e > 0$, de paramètre $p > 0$, de foyer O et dont le sommet le plus proche de O a pour coordonnées polaires $(r_0 = p/(1+e), \theta_0)$ est paramétrée par

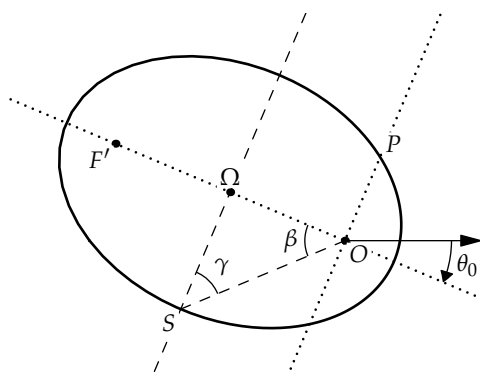
$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}.$$

L'axe focal est repéré par $[\theta = \theta_0 \pmod{\pi}]$.

Si P est un point de la conique tel que la droite (OP) soit orthogonale à l'axe focal, alors la distance OP est égale au paramètre p de la conique.

100.1 Ellipse

L'excentricité de l'ellipse est strictement comprise entre 0 et 1.



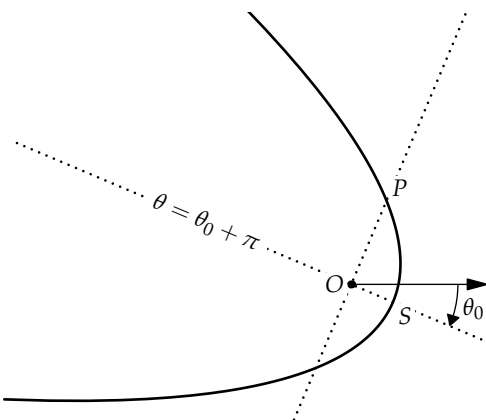
La focale c , le demi-petit axe b et le demi-grand axe a sont respectivement égaux à $O\Omega$, à ΩS et à OS .

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad e = \frac{c}{a} = \cos \beta = \sin \gamma$$

Plus l'excentricité de l'ellipse est proche de 0, plus le centre Ω et le foyer O sont proches l'un de l'autre vus du sommet S .

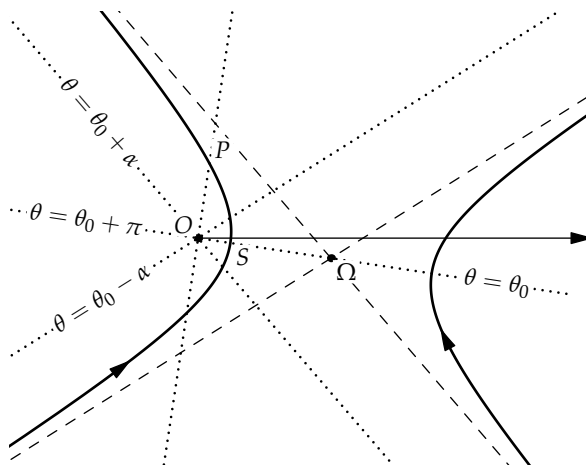
100.2 Parabole

L'excentricité de la parabole est égale à 1. La direction de l'axe focal est la direction asymptotique.



100.3 Hyperbole

L'excentricité de l'hyperbole est strictement supérieure à 1.



L'hyperbole présente deux directions asymptotiques :

$$\theta = \theta_0 \pm \alpha \quad \text{où} \quad \alpha = \text{Arccos}(-1/e).$$

Le cosinus de l'angle formé par l'axe focal et l'une des asymptotes est égal à $1/e$: plus la valeur de l'excentricité d'une hyperbole est grande, plus l'ouverture des branches est grande.

Pour $e = \sqrt{2}$, les asymptotes sont orthogonales et l'hyperbole est dite **équilatère**.

VI.3 Autres exemples

101. La cycloïde est la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$$

Au voisinage de $t = 0$,

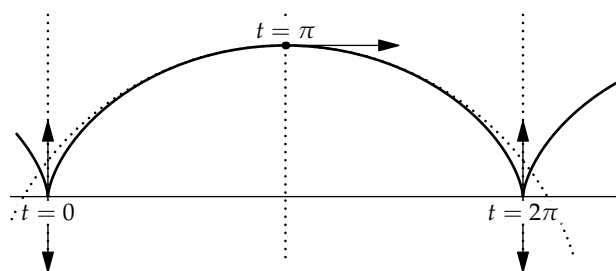
$$f(t) = \frac{t^2}{2} \cdot (0, 1) + \frac{t^3}{6} \cdot (1, 0) + o(t^3),$$

donc l'origine est un point de rebroussement.

Le rayon de courbure et une abscisse curviligne sont donnés par

$$\forall 0 \leq t \leq 2\pi, \quad R(t) = -4 \sin(t/2) \quad \text{et} \quad s(t) = -4 \cos(t/2).$$

En particulier, la longueur d'une arche de cycloïde est égale à 8.



102. La cardioïde est la courbe représentée par

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \rho(\theta) = 1 + \cos \theta.$$

Elle admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.

Pour h voisin de 0,

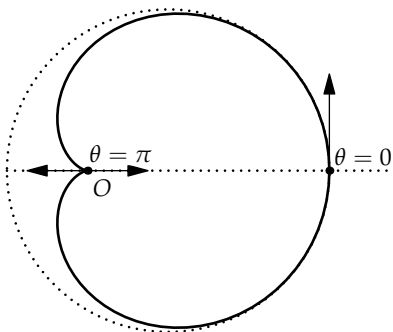
$$\rho(h) = 2 - h^2/2 + o(h^2) \quad \text{et} \quad \rho(\pi + h) \sim h^2/2$$

donc le rayon de courbure au point de paramètre $\theta = 0$ est égal à $4/3$ et l'origine, point de paramètre $\theta = \pi$, est un point de rebroussement. →[121]

Une abscisse curviligne est définie par

$$\forall -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad s(\theta) = 4 \sin \frac{\theta}{2}$$

et la longueur totale de la cardioïde est égale à 8.



103. Limaçon

Le limaçon est la courbe représentée par

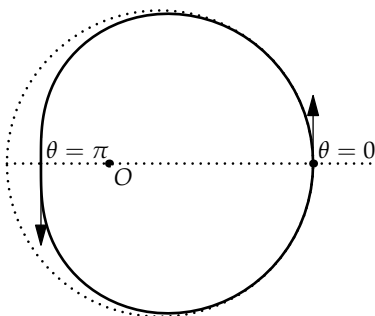
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \rho(t) = 2 + \cos t.$$

Elle admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie.

Pour h voisin de 0,

$$\rho(h) = \rho(0) - h^2/2 + o(h^2)$$

donc le rayon de courbure au point de paramètre $\theta = 0$ est égal à $9/4$. Comme $\rho'(\pi) = 0$, la courbure est nulle en $\theta = \pi$.



104. Rosaces

Les rosaces sont des courbes représentées en coordonnées polaires par

$$\rho(\theta) = \sin(n\theta)$$

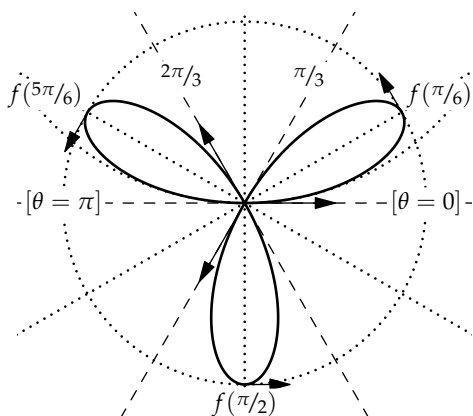
où n est un entier supérieur à 2.

Elles admettent l'axe des ordonnées pour axe de symétrie et sont invariantes par la rotation d'angle $2\pi/n$ autour de l'origine.

104.1 Cas n impair

Pour $n = 3$, la rosace est constituée de trois pétales égaux.

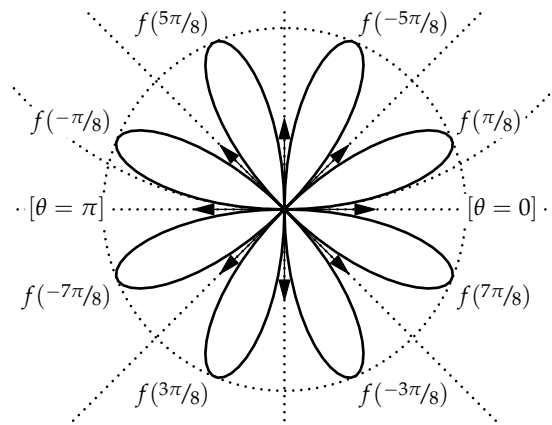
Le rayon de courbure est égal à $3/2$ en $\theta = 0$ et à $1/10$ en $\theta = \pi/6$.



104.2 Cas n pair

Pour $n = 4$, la rosace est constituée de huit pétales égaux : elle est invariante par la rotation d'angle $\pi/4$ et par les symétries orthogonales par rapport aux droites $[\theta = (2k+1)\pi/8]$.

Le rayon de courbure est égal à 2 en $\theta = 0$ et à $1/17$ en $\theta = \pi/8$.



105. L'astroïde, ou hypocycloïde à quatre rebroussements, est la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

Elle admet l'axe des abscisses pour axe de symétrie, mais aussi l'axe des ordonnées :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (x(\pi - t), y(\pi - t)) = (-x(t), y(t))$$

ainsi que les droites $[y = x]$ et $[y = -x]$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (x(\pi/2 - t), y(\pi/2 - t)) = (y(t), x(t)).$$

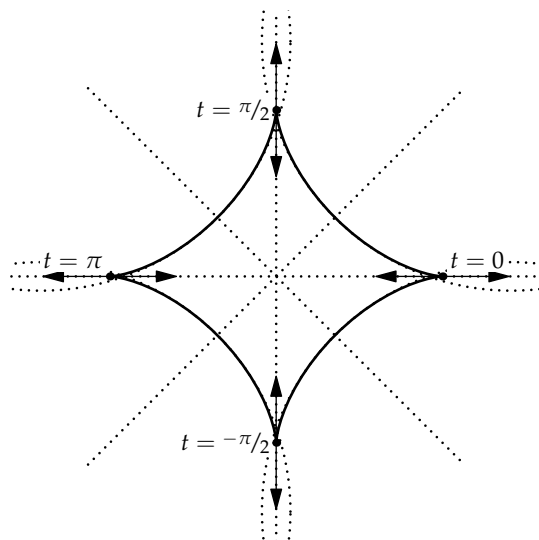
Au voisinage de $t = 0$,

$$f(t) = (1, 0) - \frac{h^2}{2} \cdot (-3, 0) + h^3 \cdot (0, 1) + o(h^3)$$

donc $f(0)$ est un point de rebroussement.

Le rayon de courbure est égal à $-3/2$ en $t = \pi/4$ car

$$V(\pi/4) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot (-1, 1) \quad \text{et} \quad A(\pi/4) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot (1, 1).$$



Une abscisse curviligne est donnée par

$$\forall 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad s(t) = -\frac{3}{4} \cos 2t.$$

La longueur totale de la courbe est égale à 6.

106. La **strophoïde** est la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \left(\frac{t(t^2 - 1)}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right).$$

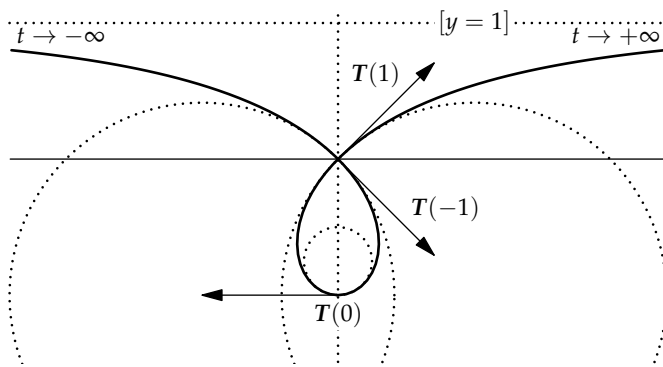
Elle admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.
Le rayon de courbure est égal à $1/4$ en $t = 0$:

$$f(t) = f(0) + t \cdot (-1, 0) + \frac{t^2}{2} \cdot (0, 4) + o(t^2)$$

et à $\sqrt{2}$ en $t = 1$:

$$f(1+h) = f(1) + h \cdot (1, 1) + \frac{h^2}{2} \cdot (1, -1) + o(h^2).$$

La strophoïde admet la droite $[y = 1]$ pour asymptote au voisinage de $\pm\infty$. $\rightarrow$ [122]



107. La **néphroïde** est la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (3 \sin t - \sin 3t, 3 \cos t - \cos 3t).$$

Au voisinage de 0,

$$f(t) = f(0) + t^2 \cdot (0, 3) + t^3 \cdot (4, 0) + o(t^3)$$

donc $f(0)$ est un point de rebroussement.

Au voisinage de $t = \pi/2$,

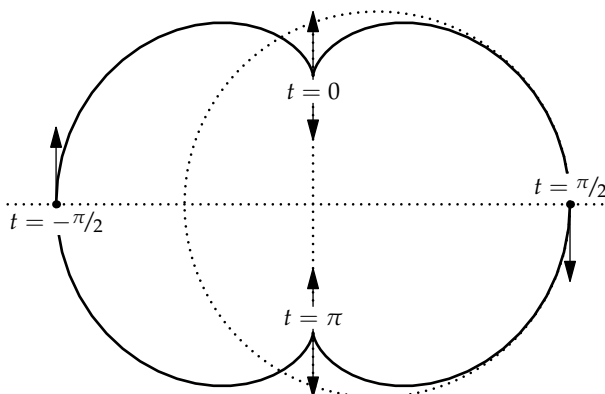
$$f(\pi/2 + h) = f(\pi/2) + h \cdot (0, -6) + \frac{h^2}{2} \cdot (-12, 0) + o(h^2)$$

et le rayon de courbure est égal à -3 .

Une abscisse curviligne est donnée par

$$\forall 0 \leq t \leq \pi, \quad s(t) = -6 \cos t$$

et la longueur de la néphroïde est égale à 24.



108. La **lemniscate de Bernoulli** est la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right).$$

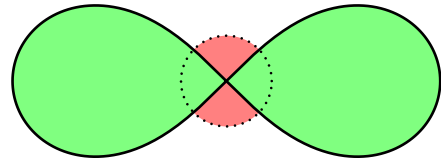
Par symétrie [49.2] [49.3], il suffit de l'étudier sur $[0, 1]$.
L'origine $O = f(0)$ est un point d'inflexion car

$$f(t) = t \cdot (1, 0) + t^3 \cdot (0, 1) + o(t^3)$$

pour t voisin de 0.

Le rayon de courbure est égal à $1/3\sqrt{2}$ en $t = 1$:

$$f(1+h) = f(1) + \frac{h}{2} \cdot (-1, 1) - \frac{h^2}{2} \cdot (1, 2) + o(h^2).$$



Cette courbe est paramétrée en coordonnées polaires par

$$\rho^2(\theta) = \frac{1}{2} \sin 2\theta.$$

109. La **deltoïde**, ou hypocycloïde à trois rebroussements, est la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (2 \sin t - \sin 3t, 2 \cos t + \cos 3t).$$

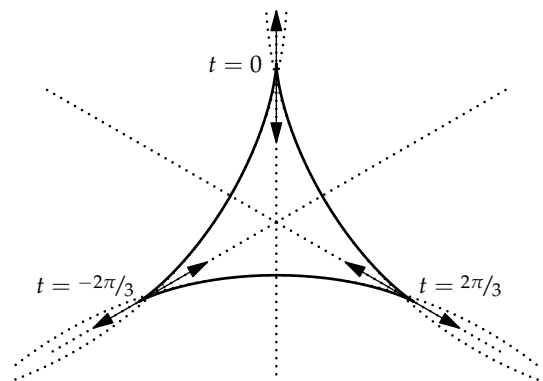
Par symétrie [49.5], il suffit d'étudier f sur $[0, \pi/3]$.

Au voisinage de $t = 0$,

$$f(t) = (0, 3) + t^2 \cdot (0, -3) + t^3 \cdot (1, 0) + o(t^3)$$

donc $f(0)$ est un point de rebroussement.

Le rayon de courbure est égal à 8 en $t = \pi/3$ car $V(\pi) = (-4, 0)$ et $A(\pi) = (0, -2)$.



110. Le **folium de Descartes** est la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right).$$

Par symétrie [49.3], il suffit de l'étudier sur $] -1, 1]$.
Le rayon de courbure est égal à $3/2$ en $t = 0$:

$$f(t) = t \cdot (3, 0) + t^2 \cdot (0, 3) + o(t^2)$$

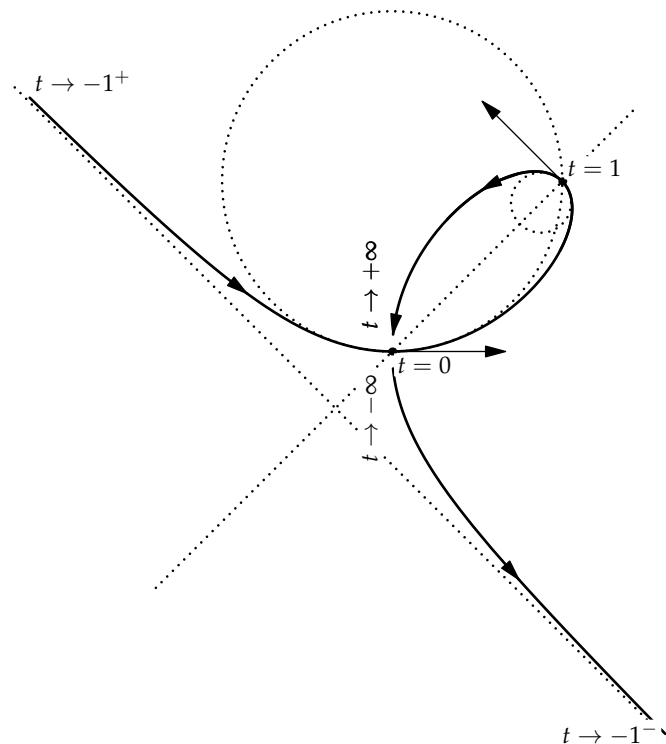
et à $3/8\sqrt{2}$ en $t = 1$ car

$$V(1) = 3/4 \cdot (-1, 1) \quad \text{et} \quad A(1) = 3/4 \cdot (-3, -5).$$

Au voisinage de $h = 0$,

$$x(-1+h) + y(-1+h) = -1 + \frac{1}{3}h^2 + o(h^2)$$

donc la droite $[x + y = -1]$ est asymptote à la courbe.



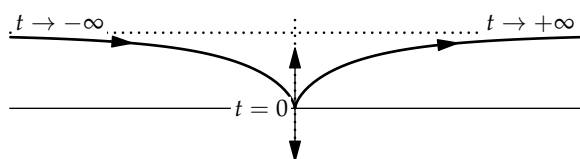
111. La **cissoïde de Dioclès** est la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \left(\frac{t^3}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2} \right).$$

Elle admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie et la droite $[y = 1]$ pour asymptote. Au voisinage de $t = 0$,

$$f(t) = t^2 \cdot (0, 1) + t^3 \cdot (1, 0) + o(t^3)$$

donc $O = f(0)$ est un point de rebroussement. $\rightarrow$ [123]



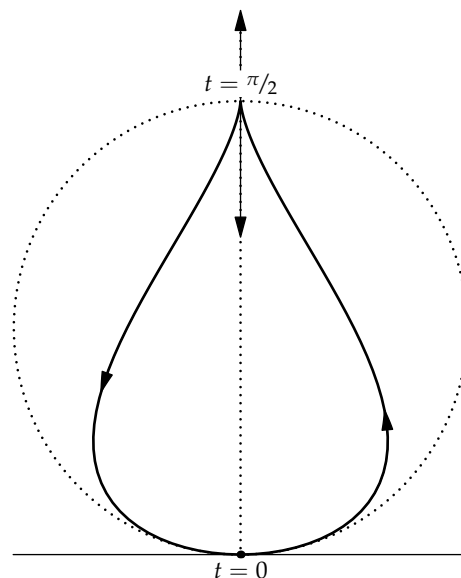
112. La **quartique piriforme** est la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (\sin^2 t, \cos^3 t \sin t).$$

L'axe des ordonnées est un axe de symétrie et il suffit d'étudier f sur $[0, \pi/2]$. Le rayon de courbure en $t = 0$ est égal à $1/2$ car $V(0) = (1, 0)$ et $A(0) = (0, 2)$.
Au voisinage de $h = 0$,

$$f(\pi/2 + h) = (0, 1) - h^2 \cdot (0, 1) - h^3 \cdot (1, 0) + o(h^3)$$

donc le point $f(\pi/2)$ est un point de rebroussement.



113. La courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (\cos 3t, \sin 2t)$$

est une **courbe de Lissajous**. Elle admet l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées pour axe de symétrie :

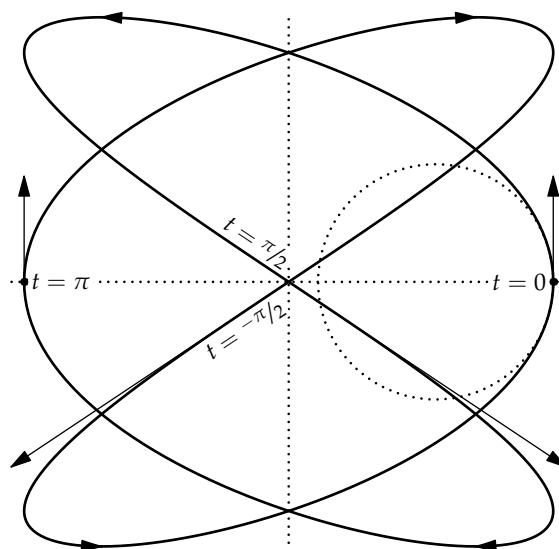
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (x(t + \pi), y(t + \pi)) = (-x(t), y(t))$$

et il suffit d'étudier f sur $[0, \pi/2]$.

Le rayon de courbure est égal à $4/9$ en $t = 0$ car $V(0) = (0, 2)$ et $A = (-9, 0)$.

L'origine $O = f(\pi/2)$ est un point d'inflexion :

$$f(\pi/2 + h) = h \cdot (3, -2) + \frac{h^3}{6} \cdot (-27, 8) + o(h^3).$$



114. L'hypocycloïde à cinq rebroussements est la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (4 \cos t + \cos 4t, 4 \sin t - \sin 4t).$$

Par symétrie [49.6], il suffit d'étudier f sur $[0, \pi/5]$.

Au voisinage de $t = 0$,

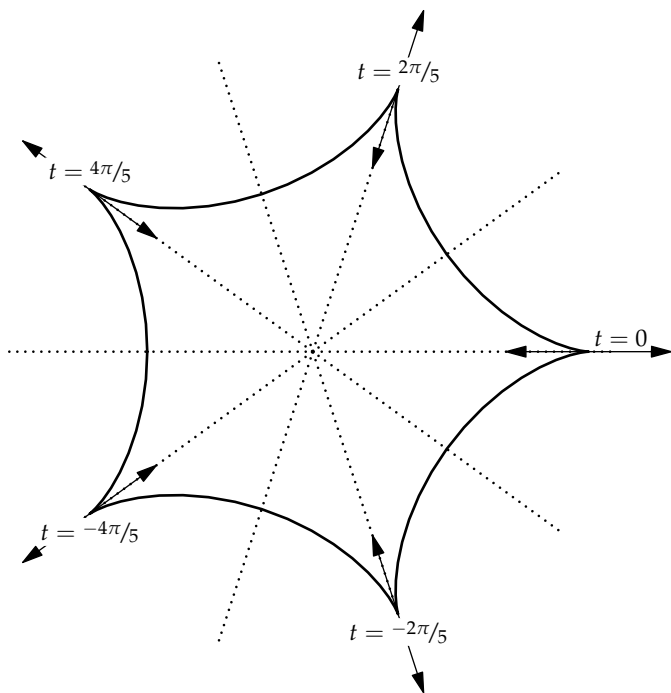
$$f(t) = f(0) - 10h^2 \cdot (1, 0) + 10h^3 \cdot (0, 1) + o(h^3)$$

donc $f(0)$ est un point de rebroussement.

Pour h voisin de 0,

$$f(\pi + h) = (-3, 0) + h \cdot (0, -8) + h^2 \cdot (-6, 0) + o(h^2)$$

donc le rayon de courbure en $f(\pi)$ est égal à $-16/3$.



115. La tractrice est la courbe paramétrée par

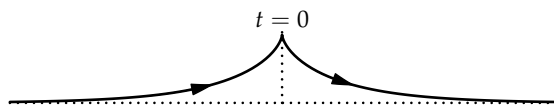
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \left(t - \operatorname{th} t, \frac{1}{\operatorname{ch} t}\right).$$

Elle admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Le point $f(0)$ est un point de rebroussement :

→[124]

$$f(t) = f(0) + \frac{t^2}{2} \cdot (0, -1) + \frac{t^3}{3} \cdot (1, 0) + o(t^3).$$



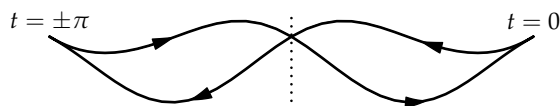
116. La moustache de Marcel est la courbe paramétrée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (2 \cos t, \operatorname{ch}(\cos t + \sin^5 t)).$$

Au voisinage de $t = 0$,

$$f(t) = f(0) - \frac{t^2}{2} \cdot (2, \operatorname{sh} 1) + \frac{t^4}{24} \cdot (2, 3 \operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} 1) + o(t^4)$$

donc $f(0)$ est un point de rebroussement de deuxième espèce : au voisinage de ce point, la courbe ne traverse pas sa tangente.



Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

117. Exemples et contre-exemples

1. Exemple d'arc paramétré (I, f) avec $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ dont le support est un triangle.

2. Exemple de paramétrage cartésien [50] pour lequel $f(t)$ tend vers l'infini au voisinage de a sans que le rapport $y(t)/x(t)$ admette de limite.

Approfondissement

118. Étudier les asymptotes de l'arc paramétré par

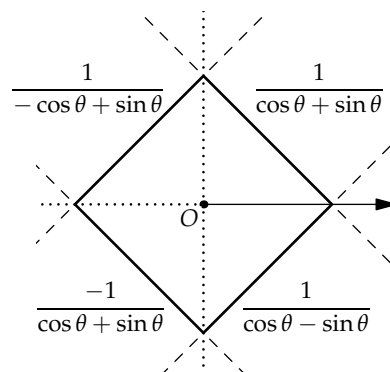
$$f(t) = \left(\frac{t+1}{t(t-1)}, \frac{t(t+1)}{t-1}\right).$$

119. Il suffit de discuter sur les signes de $\sin \theta$ et $\cos \theta$ pour démontrer que le support de l'arc paramétré par

$$\rho(\theta) = \frac{1}{|\sin \theta| + |\cos \theta|}$$

est un carré.

→[98]



120. Caractérisation de la lemniscate

Le plan est muni de sa structure euclidienne canonique.

Soient $A = (1, 0)$ et $B = (-1, 0)$. Le lieu des points M tels que

$$\|AM\| \|BM\| = 1$$

est représenté en coordonnées polaires par

$$\rho^2(\theta) = 2 \cos 2\theta.$$

Cette courbe est l'image de la lemniscate [108] par une similitude.

121. Suite de [102] –

121.1 Le rayon de courbure de la cardioïde au point de paramètre θ est égal à

$$\frac{4 \cos \theta/2}{3}.$$

121.2 Construction de la cardioïde

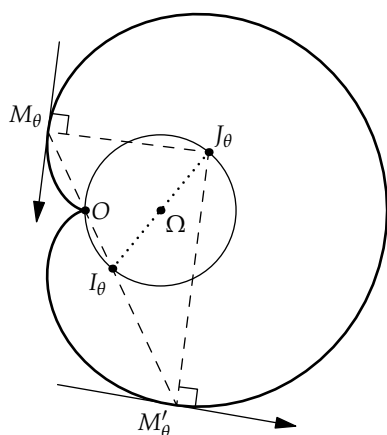
On note M_θ , le point de la cardioïde paramètre θ ; M'_θ , le point de paramètre $(\theta + \pi)$; I_θ , le milieu du segment d'extrémités M_θ et M'_θ et J_θ , le symétrique de I_θ par rapport au point $\Omega = (1/2, 0)$.

1. Pour tout θ , le point I_θ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω qui passe par l'origine O et les quatre points O , M_θ , M'_θ et I_θ sont alignés.

2.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad OJ_\theta = \sin \theta \cdot u_\theta(\theta)$$

3. Si $J_\theta \neq M_\theta$, la droite passant par ces deux points est la normale à la cardioïde issue de M_θ .
4. Comment construire la cardioïde point par point ?

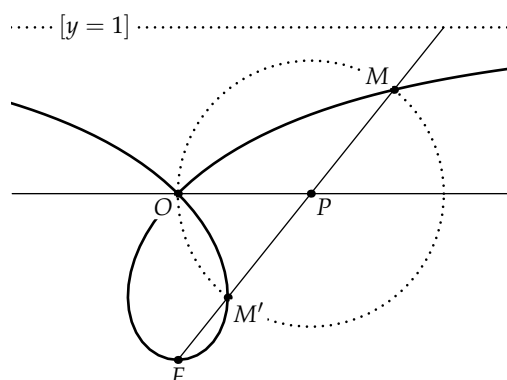


122. Construction de la strophoïde [106]

1. La strophoïde est représentée en coordonnées polaires par

$$\rho(\theta) = \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta}.$$

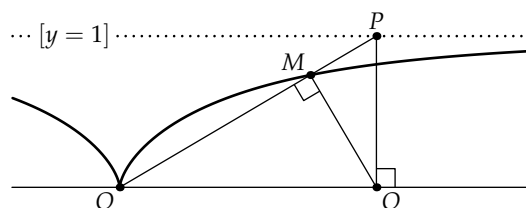
2. Soient $F = (0, -1)$ et P , un point de l'axe des abscisses distinct de l'origine O . Tout point de la strophoïde situé sur la droite (FP) appartient au cercle de centre P qui passe par O . Comment construire la strophoïde point par point ?



123. Construction de la cissoïde [111]

1. Pour tout point P d'abscisse non nulle, on note Q , le projeté orthogonal de P sur l'axe des abscisses et M , le projeté orthogonal de Q sur la droite (OP) . Lorsque le point P parcourt la droite $[y = 1]$, le lieu des points M est la cissoïde privée de l'origine. (Noter t , l'abscisse de P .)
2. La cissoïde est représentée en coordonnées polaires par

$$\rho(\theta) = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}.$$



124. Suite de [115] –

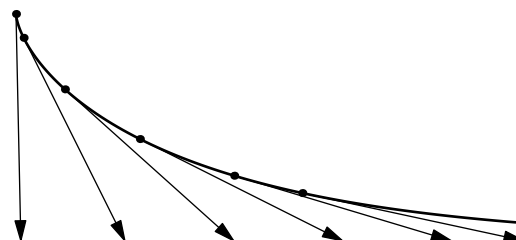
- 124.1 Une abscisse curviligne de la tractrice est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad s(t) = \ln(\operatorname{ch} t).$$

Comment prolonger s en une abscisse curviligne définie sur $\mathbb{R}$?

124.2 Interprétation de la tractrice

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note M_t , le point de la tractrice de paramètre t et A_t , le point d'intersection de la tangente en M_t avec l'axe des abscisses. Alors $A_t = (t, 0)$ et la distance $M_t A_t$ est constante.



Pour aller plus loin

125. Questions pour réfléchir

1. On suppose connus deux paramétrages (I, f) et (J, g) du même support Γ et que $M_0 = f(t_0) = g(t_1) \in \Gamma$ est un point régulier pour ces deux arcs paramétrés. Comparer les tangentes à Γ au point M_0 d'abord au sens de la définition [11], puis au sens de la définition [15.3].

126. Autres types de paramétrage

Il y a d'autres manières de représenter des courbes planes que les deux types de paramétrages qu'on vient d'étudier en détail, mais les méthodes sont toujours les mêmes !

L'étude qualitative d'une courbe cherche toujours à mettre en évidence les propriétés de symétrie, les points stationnaires (et le comportement de la courbe au voisinage de ces points), les points réguliers remarquables (ceux pour lesquels le tracé de la tangente et du cercle osculateur sont les plus simples), le comportement asymptotique...

Calculer les vecteurs vitesse et accélération pour chacune des paramétrages suivants. Caractériser les points stationnaires.

1. $f(t) = x(t) \cdot u(t) + y(t) \cdot v(t)$
2. $f(t) = \rho(t) \cdot u_r(\theta(t))$
3. $f(r) = r \cdot u_r(\theta(r))$

127. Enveloppe d'une famille de droites

Pour tout $t \in I$, on note $\mathcal{D}_t$, la droite de $\mathbb{R}^2$ représentée par l'équation

$$a(t)x + b(t)y = c(t)$$

où a, b et c sont des fonctions régulières de I dans $\mathbb{R}$.

Le support de (I, f) admet pour tout $t \in I$ la droite $\mathcal{D}_t$ pour tangente au point $M_t = f(t)$ si, et seulement si,

$$\forall t \in I, \quad \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{pmatrix} \cdot f(t) = \begin{pmatrix} c(t) \\ c'(t) \end{pmatrix}.$$

Ce support est appelé **enveloppe** de la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$.

128. Déterminations continues du logarithme [24]

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}^*$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Définir une fonction $\mathcal{L}(f) : I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \exp[\mathcal{L}(f)(t)].$$

Unicité d'une telle fonction ? Expliciter la dérivée de $\mathcal{L}(f)$ lorsque

$$\forall t \in I, \quad f(t) = (t - \alpha)^{-1},$$

où α est un complexe tel que $\Re(\alpha) \neq 0$.

129. Caractérisation géométrique du cercle osculateur

Soit (t_0, M_0) , un point birégulier de l'arc paramétré plan (I, f) . Le plan est rapporté au repère $\mathcal{R}_0 = (M_0, T(t_0), N(t_0))$.

129.1 On note X_t et Y_t , les coordonnées du point $M_t = f(t)$ relatives au repère $\mathcal{R}_0$.

Pour tout t assez proche de t_0 ,

$$X_t = \langle f(t) - f(t_0) | T(t_0) \rangle \sim \|V(t_0)\| \cdot (t - t_0),$$

$$Y_t = \langle f(t) - f(t_0) | N(t_0) \rangle \sim \gamma(t_0) \|V(t_0)\|^2 \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2}$$

donc

$$\frac{X_t^2}{2Y_t} \sim R(t_0).$$

129.2 On considère un cercle $\mathcal{C}$ passant par M_0 et admettant le vecteur $T(t_0)$ pour vecteur tangent au point M_0 .

1. Il existe $R \in \mathbb{R}^*$ tel que le centre C du cercle $\mathcal{C}$ soit caractérisé par

$$M_0 C = R \cdot N(t_0).$$

2. Au voisinage du point M_0 , le cercle $\mathcal{C}$ est confondu avec le graphe relatif à $\mathcal{R}_0$ de la fonction φ définie par

$$\varphi(X) = |R| - \sqrt{R^2 - X^2}.$$

3. On suppose que $R > 0$. Si le point M de coordonnées (X, Y) est assez proche du point M_0 , alors $X^2 / (2Y) \sim R$.

4. Étudier le cas $R < 0$.

130. Arcs orientables

Soient (I, f) , un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ et A , l'ensemble des arcs paramétrés $\mathcal{C}^k$ -équivalents à (I, f) .

1. Existe-t-il un arc $(J, g) \in A$ qui soit à la fois de même sens que (I, f) et de sens contraire à (I, f) ?

2. Définir la notion d'**arc orientable**.

1. On considère des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé E , réel ou complexe, de dimension finie. Selon les cas, on notera $|u|$, la valeur absolue du réel u , le module du complexe u ou la norme du vecteur u .

I

Brève introduction à la théorie lebesguienne de l'intégrale

I.1 Théorème fondamental

2. La théorie de l'intégration de Lebesgue prend appui sur certains résultats élémentaires et procède par généralisations successives.

3. → Soit f , une fonction continue sur $[a, b] \times [c, d]$. Les intégrales successives

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy \quad \text{et} \quad \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

sont bien définies et sont égales.

→ [9.60]

4. Si f est continue sur le pavé $[a, b] \times [c, d]$, alors l'intégrale double de f sur ce pavé est définie par

$$\iint_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

5. La théorie de Lebesgue définit ensuite la famille des parties boréliennes du plan; la classe des fonctions boréliennes et, si A est une partie borélienne, ne définit l'intégrale d'une fonction borélienne f sur A que si cette fonction f vérifie une condition supplémentaire qui la rend intégrable sur A .

6. Dans un premier temps, il n'est pas nécessaire d'expliciter la définition de l'intégrale sur A d'une fonction intégrable sur la partie borélienne A . Il suffit d'admettre que cette définition est compatible avec le théorème [3] et permet d'utiliser les règles usuelles du calcul intégral ([8], [10], [9], [12]), qui traduisent le fait qu'une intégrale sert à mesurer une grandeur extensive (longueur, aire, volume, travail, énergie, masse, charge...).

I.2 Propriétés de l'intégrale double

7. Pour comprendre la portée des théorèmes qui suivent, il suffit de savoir que les fonctions continues sont boréliennes et que les parties ouvertes, fermées et rectangulaires du plan sont boréliennes.

8. → Intégrale d'une fonction constante

Si la partie borélienne A est bornée et si la fonction f est constante, égale à a sur A , alors

$$\iint_A f(x, y) dx dy = a |A|$$

où $|A|$ désigne l'aire de A .

9. Linéarité

Soit A , une partie borélienne de $\mathbb{R}^2$.

9.1 → Soient f et g , deux fonctions à valeurs complexes, intégrables sur A et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors $\alpha f + g$ est intégrable sur A et

$$\iint_A (\alpha f + g) dx dy = \alpha \iint_A f dx dy + \iint_A g dx dy.$$

9.2 → Si $f : A \rightarrow E$ est intégrable et si $T : E \rightarrow F$ est linéaire, alors $T(f) : A \rightarrow F$ est intégrable et

$$T\left(\iint_A f(x, y) dx dy\right) = \iint_A T(f)(x, y) dx dy.$$

9.3 ▷ Si $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable, alors $\Re(f)$, $\Im(f)$ et $\bar{f}$ sont intégrables sur A et leurs intégrales sont respectivement égales à la partie réelle, à la partie imaginaire et au conjugué de l'intégrale de f .

10. → Négligeabilité du bord

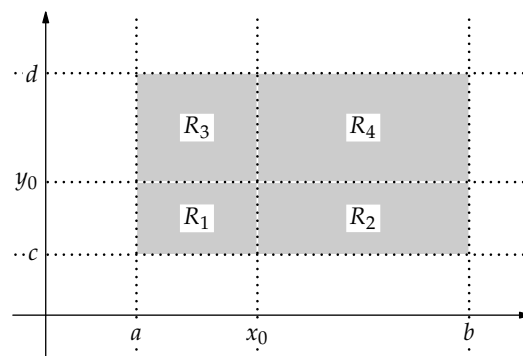
Soit f , une fonction intégrable sur une partie borélienne A . S'il existe une partie borélienne A_0 tel que A soit l'union de A_0 et des supports d'un nombre fini d'arcs paramétrés de classe $\mathcal{C}^1$, alors f est intégrable sur A_0 et

$$\iint_A f dx dy = \iint_{A_0} f dx dy.$$

11. → Additivité

Avec $x_0 \in I_1 =]a, b[$ et $y_0 \in I_2 =]c, d[$, on définit quatre rectangles :

$$\begin{aligned} R_1 &=]a, x_0[\times]c, y_0[, & R_2 &=]x_0, b[\times]c, y_0[, \\ R_3 &=]a, x_0[\times]y_0, d[, & R_4 &=]x_0, b[\times]y_0, d[. \end{aligned}$$



Une fonction borélienne f est intégrable sur $R = I_1 \times I_2$ si, et seulement si, elle est intégrable sur R_1, R_2, R_3 et R_4 et

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^4 \iint_{R_k} f(x, y) dx dy.$$

12. Positivité

Soit A , une partie borélienne de $\mathbb{R}^2$.

12.1 → Si les fonctions $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sont intégrables et si

$$\forall (x, y) \in A, \quad f(x) \leq g(x),$$

alors

$$\iint_A f(x, y) dx dy \leq \iint_A g(x, y) dx dy.$$

12.2 → Inégalité de la moyenne

Si la fonction $f : A \rightarrow E$ est intégrable, alors $|f|$ est intégrable sur A et

$$\left| \iint_A f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_A |f(x, y)| dx dy.$$

Entraînement**13. Questions pour réfléchir**

1. Si f est intégrable sur le rectangle fermé $R = [a, b] \times [c, d]$, alors f est intégrable sur le rectangle ouvert $R_o =]a, b[\times]c, d[$ et

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{R_o} f(x, y) \, dx \, dy.$$

2. On suppose que f est intégrable sur $D = [x^2 + y^2 \leq r^2]$. On pose

$$D_0 = [x^2 + y^2 < r^2] \quad \text{et} \quad D_1 = D_0 \cap ([x \leq 0] \cap [y \neq 0])^c.$$

La fonction f est intégrable sur D_0 et sur D_1 et

$$\iint_D f \, dx \, dy = \iint_{D_0} f \, dx \, dy + \iint_{D_1} f \, dx \, dy.$$

3. Suite de [10] – Le rectangle $R = I_1 \times I_2$ est l'union de l'ouvert $R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$ et des deux intervalles ouverts

$$[a < x < b] \cap [y = y_0] \quad \text{et} \quad [x = x_0] \cap [c < y < d]$$

et

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4} f(x, y) \, dx \, dy.$$

II**Intégrales sur un rectangle**

14. ∇ Un rectangle de $\mathbb{R}^2$ est le produit cartésien $I_1 \times I_2$ de deux intervalles de $\mathbb{R}$.

15. ∇ Un pavé de $\mathbb{R}^2$ est le produit cartésien $[a, b] \times [c, d]$ de deux segments.

II.1 Fonctions intégrables

16. ∇ La fonction $f : I_1 \times I_2 \rightarrow E$ est **intégrable sur le rectangle** $I_1 \times I_2$ lorsque elle est continue sur $I_1 \times I_2$ et qu'il existe une constante réelle $M > 0$ telle que

$$\iint_{I_1 \times I_2} |f(x, y)| \, dx \, dy \leq M$$

indépendamment du choix des segments $J_1 \subset I_1$ et $J_2 \subset I_2$.

17. Les fonctions constantes sont intégrables sur le rectangle $I_1 \times I_2$ si, et seulement si, les intervalles I_1 et I_2 sont bornés.

18. Une combinaison linéaire de fonctions intégrables sur un rectangle R est intégrable sur le rectangle R .

19. La fonction f définie par

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

n'est pas intégrable sur $R = \mathbb{R}^2$.

Critère de comparaison

20. $\rightarrow$ Soient f et g , deux fonctions continues sur un rectangle R telles que

$$\forall (x, y) \in R, \quad 0 \leq |f(x, y)| \leq |g(x, y)|,$$

Si g est intégrable sur R , alors f est intégrable sur R .

21. On considère un rectangle $R \subset \mathbb{R}^2$.

21.1 Une fonction f à valeurs réelles est intégrable sur R si, et seulement si, sa partie positive f^+ et sa partie négative f^- sont intégrables sur R .

21.2 Une fonction f à valeurs complexes est intégrable sur R si, et seulement si, sa partie réelle $\Re(f)$ et sa partie imaginaire $\Im(f)$ sont intégrables sur R .

21.3 Une fonction à valeurs dans E est intégrable sur R si, et seulement si, ses composantes relatives à une base (quelconque) de E sont intégrables sur R .

Critère pratique

22. $\rightarrow$ On suppose que :

□ **Continuité**

La fonction f est continue sur le rectangle $I_1 \times I_2$;

□ **Intégrabilité**

Pour tout $x \in I_1$, la fonction $[y \mapsto f(x, y)]$ est intégrable sur l'intervalle I_2 ;

□ **Domination**

La fonction

$$[x \mapsto \int_{I_2} |f(x, y)| \, dy]$$

est intégrable sur I_1 .

Alors la fonction f est intégrable sur $I_1 \times I_2$.

23. **Exemples**

23.1 Quels que soient $0 < a < b$, la fonction f définie par

$$f(x, y) = e^{-xy}$$

est intégrable sur le rectangle $]0, +\infty[\times [a, b]$, mais n'est pas intégrable sur le rectangle $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

23.2 La fonction f définie par

$$\forall x > 0, \forall y > 0, \quad f(x, y) = \frac{1}{(1+x)(1+xy^2)}$$

est intégrable sur le rectangle $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

II.2 Théorèmes de Fubini

24. Les théorèmes de Fubini affirment qu'une intégrale double sur un rectangle peut, sous certaines conditions minimales, être calculée par intégrations successives [25] et que l'ordre dans lequel sont effectuées ces intégrations est sans importance [27].

25. $\rightarrow$ On suppose que :

(H₁) □ La fonction continue $f : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable sur le rectangle $I_1 \times I_2$;

(H₂) □ Pour tout $x \in I_1$, la fonction $[y \mapsto f(x, y)]$ est intégrable sur l'intervalle I_2 ;

(H₃) □ La fonction $g : I_1 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in I_1, \quad g(x) = \int_{I_2} f(x, y) \, dy$$

est intégrable sur l'intervalle I_1 .

Alors

$$\iint_{I_1 \times I_2} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

26. Si l'intégrande f est une fonction positive, il est inutile de vérifier l'hypothèse (H₁) du théorème [25] : d'après le critère pratique [22], cette propriété est une conséquence des deux autres hypothèses.

27. → Intversion des signes $\int$

On suppose que :

(H₁) $\square$ La fonction continue $f : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable sur le rectangle $I_1 \times I_2$;

(H₂) $\square$ Pour tout $x \in I_1$, la fonction $[y \mapsto f(x, y)]$ est intégrable sur l'intervalle I_2 ;

(H₃) $\square$ La fonction $g : I_1 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in I_1, \quad g(x) = \int_{I_2} f(x, y) dy$$

est intégrable sur l'intervalle I_1 ;

(H₄) $\square$ Pour tout $y \in I_2$, la fonction $[x \mapsto f(x, y)]$ est intégrable sur l'intervalle I_1 ;

(H₅) $\square$ La fonction $h : I_2 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall y \in I_2, \quad h(y) = \int_{I_1} f(x, y) dx$$

est intégrable sur l'intervalle I_2 .

Alors

$$\int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x, y) dx \right) dy.$$

Applications

28. Soient f et g , deux applications continues et intégrables sur I . La fonction

$$h = [(x, y) \mapsto f(x)g(y)]$$

est continue et intégrable sur $I \times I$ et

$$\iint_I h(x, y) dx dy = \left(\int_I f(x) dx \right) \left(\int_I g(y) dy \right).$$

29. Produit de convolution

Soient f et g , deux fonctions continues, bornées et intégrables sur $\mathbb{R}$. La fonction

$$h = \left[x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt \right]$$

est continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \right).$$

30. Si $h \in \mathcal{C}^0([-T, T], \mathbb{C})$ et $f \in \mathcal{L}_c^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors

$$\int_{-T}^T h(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx \right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left[\int_{-T}^T e^{itx} h(t) dt \right] dx.$$

31. Le théorème de Fubini permet de calculer certaines intégrales qu'on ne peut déduire d'un calcul de primitive.

31.1 Suite de [23.1] –

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}.$$

31.2 Avec $I = [0, 1]$ et $A = I \times I$,

$$\int_I \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \iint_A \frac{x dx dy}{(1+x^2)(1+xy)} = \frac{\pi \ln 2}{8}.$$

31.3 Avec $I =]0, \pi/2[$ et $A = I \times I$,

$$\int_I \frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x} dx = \iint_A \frac{\sin y dx dy}{1+\cos x \cos y} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Entraînement**32. Questions pour réfléchir**

1. Condition pour qu'un rectangle soit ouvert? fermé? compact?

2. Suite de [20] – Si f n'est pas intégrable sur R , alors g n'est pas intégrable sur R .

3. Soit f , une fonction continue sur le rectangle $I_1 \times I_2$. Si, pour tout $y \in I_2$, l'application $[x \mapsto f(x, y)]$ est intégrable sur I_1 et si l'application

$$[y \mapsto \int_{I_1} |f(x, y)| dx]$$

est intégrable sur I_2 , alors la fonction f est intégrable sur $I_1 \times I_2$.

4. En quoi les hypothèses du théorème de Fubini [25] sont-elles minimales?

5. Soient f et g , deux fonctions continues sur $[a, b]$. Calculer l'intégrale double

$$\iint_{[a,b] \times [a,b]} [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 dx dy$$

et retrouver l'inégalité de Schwarz.

→[70]

III**Intégrale double sur une partie simple**

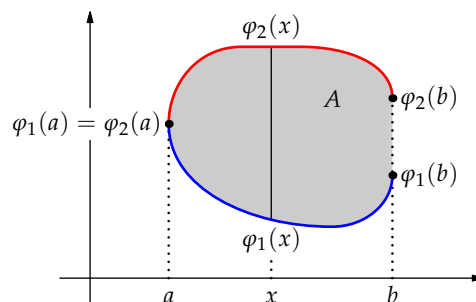
33. Nous allons considérer maintenant des domaines d'intégration plus généraux qu'un rectangle : un de nos objectifs est de mesurer l'aire de parties du plan définies par des conditions simples.

III.1 Parties élémentaires

34. $\nless$ Une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ est une **partie élémentaire** lorsque :

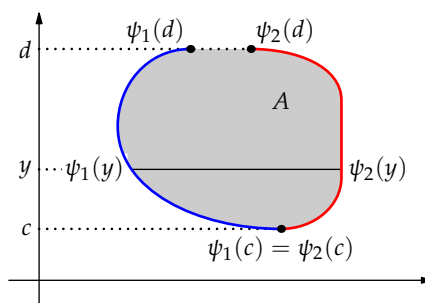
(H₁) $\square$ Il existe un segment $[a, b]$ et deux applications φ_1 et φ_2 continues sur $[a, b]$ telles que

$$A = [a \leq x \leq b] \cap [\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)]$$



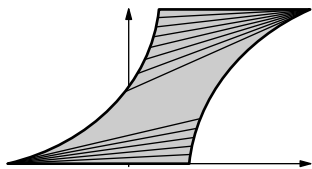
(H₂) $\square$ Il existe un segment $[c, d]$ et deux applications ψ_1 et ψ_2 continues sur $[c, d]$ telles que

$$A = [\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)] \cap [c \leq y \leq d].$$

**35. Exemples de parties élémentaires**

1. Le pavé $[a, b] \times [c, d]$ est une partie élémentaire.
2. Un triangle est une partie élémentaire.
3. Un disque est une partie élémentaire.

4. Une partie élémentaire n'est pas nécessairement convexe.



36. → Suite de [34] – Si A est une partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$, alors toute fonction continue f de A dans E est intégrable sur A et

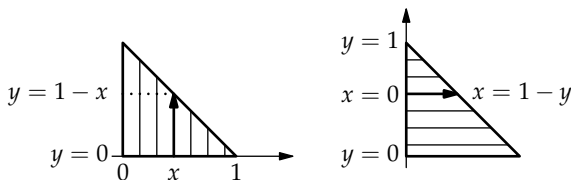
$$\begin{aligned}\iint_A f(x, y) \, dx \, dy &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.\end{aligned}$$

37. Exemples : Intégration sur un triangle

Une figure est nécessaire pour expliciter les fonctions φ_1 et φ_2 (ou ψ_1 et ψ_2 si on préfère).

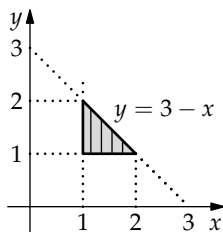
37.1 Si $T = [x \geq 0] \cap [y \geq 0] \cap [x + y \leq 1]$, alors

$$\iint_T xy \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-y} xy \, dx \, dy = \frac{1}{24}.$$



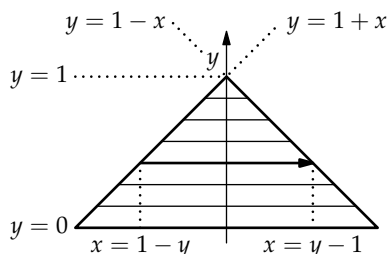
37.2 Si $T = [x \geq 1] \cap [y \geq 1] \cap [x + y \leq 3]$, alors

$$\iint_T \frac{dx \, dy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left(\int_1^{3-x} \frac{dy}{(x+y)^2} \right) dx = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3}.$$



37.3 Si $T = [x \leq x + y \leq 1] \cap [y - x \leq 1]$, alors

$$\iint_T x^2 y \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} x^2 y \, dx \right) dy = \frac{1}{30}.$$



37.4 Si $T = [x \geq 0] \cap [x \leq x + y \leq 1]$, alors [37.1]

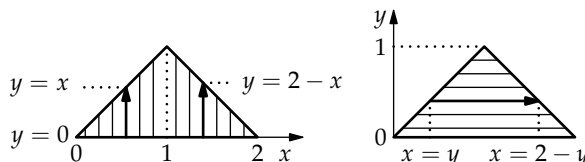
$$\iint_T (x + y + 1) \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x + y + 1 \, dy \right) dx = \frac{5}{6}.$$

37.5 Si $T = [x \geq 0] \cap [x \leq x + y \leq \pi]$, alors

$$\begin{aligned}\iint_T (x + y) \sin x \sin y \, dx \, dy &= 2 \int_0^\pi x \sin x \left(\int_0^{\pi-x} \sin y \, dy \right) dx \\ &= \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

37.6 Si T est le triangle de sommets $A = (0,0)$, $B = (1,1)$ et $C = (2,0)$, alors

$$\begin{aligned}\iint_T f \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^x f \, dy \, dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_y^{2-y} f \, dx \, dy.\end{aligned}$$

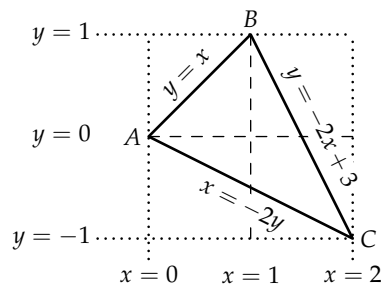


En particulier

$$\iint_T (x + y) \, dx \, dy = \frac{4}{3}.$$

37.7 Si T est le triangle de sommets $A = (0,0)$, $B = (1,1)$ et $C = (2,-1)$, alors

$$\begin{aligned}\iint_T f \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_{-x/2}^x f \, dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{-x/2}^{-2x+3} f \, dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^0 \left(\int_{-2y}^{(3-y)/2} f \, dx \right) dy + \int_0^1 \left(\int_x^{(3-y)/2} f \, dx \right) dy.\end{aligned}$$



En particulier,

$$\iint_T (x + 2y)^2 \, dx \, dy = \frac{9}{4}.$$

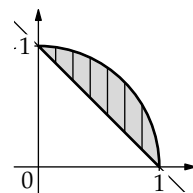
38. Autres exemples

38.1 La partie

$$A = [x + y \geq 1] \cap [x^2 + y^2 \leq 1]$$

est élémentaire et

$$\begin{aligned}\iint_A xy^2 \, dx \, dy &= \int_0^1 x \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \, dy \right) dx \\ &= \frac{1}{20}.\end{aligned}$$



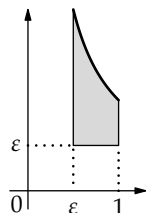
Cette intégrale peut aussi être calculée par la formule de Green-Riemann. → [XXX]

38.2 Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, la partie

$$D_\varepsilon = [\varepsilon \leq x \leq 1] \cap [\varepsilon \leq y \leq 1/x]$$

est élémentaire et

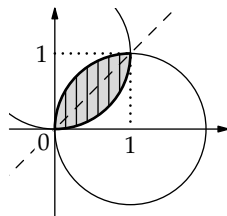
$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{dx dy}{\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{y}} = \int_\varepsilon^1 \left(\int_\varepsilon^{1/x} \frac{dy}{\sqrt[4]{y}} \right) \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 8.$$



38.3 La partie

$$A = [x^2 + y^2 \leq 2x] \cap [x^2 + y^2 \leq 2y]$$

est élémentaire.



$$\iint_A (x+y)^2 dx dy = \int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} (x+y)^2 dy \right) dx = \frac{3\pi}{4} - \frac{5}{3}$$

Par symétrie par rapport à $[y = x]$,

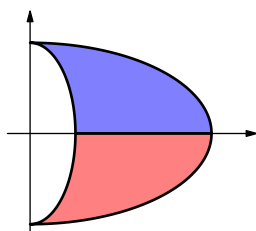
$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy = 0.$$

III.2 Parties simples

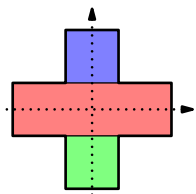
39. Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est **simple** lorsqu'elle est la réunion d'un nombre fini de parties élémentaires dont les intérieurs sont deux à deux disjoints.

40. Exemples de parties simples

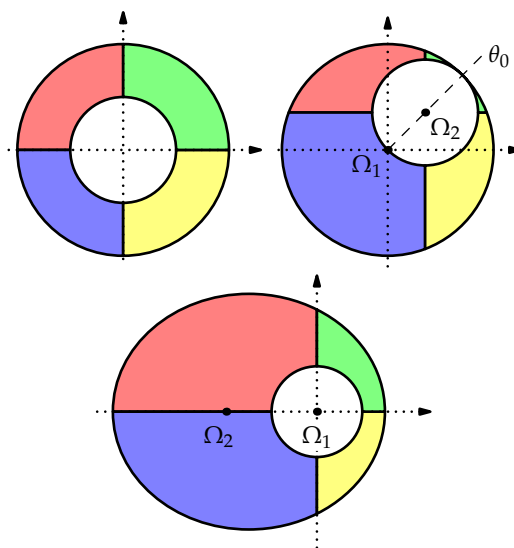
40.1 La partie suivante est constituée de deux parties élémentaires.



40.2 La partie suivante est constituée de trois parties élémentaires.



40.3 Un anneau circulaire, centré ou non, de même qu'un anneau elliptique, est constitué de quatre parties élémentaires.



41. Si D est une partie simple de $\mathbb{R}^2$ qui est l'union des parties élémentaires $A_1, \dots, A_n$ dont les intérieurs sont deux à deux disjoints et si $f : D \rightarrow E$ est une fonction continue, alors

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^n \iint_{A_k} f(x, y) dx dy.$$

42. Additivité de l'intégrale

Si D_1 et D_2 sont deux parties simples du plan d'intérieurs disjoints, alors $D = D_1 \cup D_2$ est une partie simple du plan et, pour toute application f continue sur D ,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

43. Aire d'une partie simple

43.1 Si A est une partie simple de $\mathbb{R}^2$, alors l'aire de A est le réel $v_2(A)$ défini par

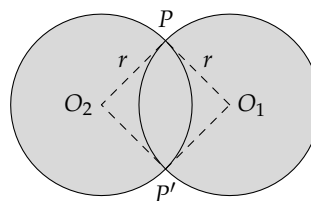
$$v_2(A) = \iint_A dx dy.$$

43.2 L'aire d'une partie simple est la somme des aires des parties élémentaires qui la composent.

43.3 Si $D_1, \dots, D_n$ sont des parties simples dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, alors leur union D est une partie simple et

$$v_2(D) = \sum_{k=1}^n v_2(D_k).$$

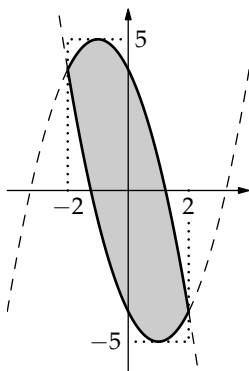
44. Soit A , l'union de deux disques fermés de rayon r dont les centres O_1 et O_2 sont distants de $\sqrt{2}r$. La partie A est l'union de deux parties élémentaires A_1 et A_2 d'intérieurs disjoints.



L'intersection des deux disques D_1 et D_2 est une partie élémentaire du plan et

$$v_2(D_1 \cap D_2) = v_2(D_1) + v_2(D_2) - v_2(A) = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) r^2.$$

45. La partie $A = [x^2 - 2x - 4 \leq y \leq -x^2 - 2x + 4]$ est une partie élémentaire



et son aire est donnée par

$$\int_{-2}^2 [(-x^2 - 2x + 4) - (x^2 - 2x - 4)] dx = \frac{64}{3}.$$

Entraînement

46. Questions pour réfléchir

1. Suite de [34] – La fonction φ_1 admet c pour minimum : elle est décroissante sur $[a, \psi_1(c)]$ et croissante sur $[\psi_2(c), b]$. La fonction φ_2 admet d pour maximum : elle est croissante sur $[a, \psi_1(d)]$ et décroissante sur $[\psi_2(d), b]$.

2. Une partie élémentaire est une partie compacte (et donc borélienne [7]) et connexe par arcs du plan.

3. Si A est une partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$, l'intersection de A avec une droite horizontale ou avec une droite verticale est un segment.

4. Soient A_1 et A_2 , deux parties élémentaires dont les intérieurs sont disjoints. Que dire de $A_1 \cap A_2$?

5. Une partie simple est compacte.

6. Une partie simple est-elle connexe par arcs ?

7. L'astroïde [27.105] limite une partie élémentaire.

8. La cardioïde [27.102] limite une partie simple qui n'est pas une partie élémentaire.

9. Suite de [45] – En comparant la partie A à un parallélogramme, on devine que son aire est proche de 20.

IV

Changements de variables

47. Soient U et V , deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et φ , un difféomorphisme de U sur V .

47.1 On considère ce difféomorphisme comme un changement de variables : on note donc

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

et la bijection réciproque, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V , est notée

$$\psi(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

47.2 L'image réciproque d'une partie $D \subset U$ par φ est aussi l'image de D par la bijection réciproque :

$$\forall D \subset V, [\varphi(u, v) \in D] = \psi_*(D).$$

47.3 Règle de la chaîne

Si les points $(x, y) \in V$ et $(u, v) \in U$ sont liés par $(x, y) = \varphi(u, v)$, alors

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{vmatrix}^{-1}.$$

48. → Formule du changement de variables

Soient $\varphi : U \rightarrow V$, un difféomorphisme ; D , une partie simple contenue dans V et f , une application continue sur D . Si

$$\Delta = [\varphi(u, v) \in D] \subset U$$

est une partie simple de $\mathbb{R}^2$, alors

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\varphi(u, v)) |\text{Jac } \varphi(u, v)| du dv.$$

49. Exemple fondamental

Si $\varphi \in L(\mathbb{R}^2)$ est représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R}),$$

alors φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et son jacobien est constant :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, |\text{Jac } \varphi(u, v)| = |ad - bc| = |\det \varphi|.$$

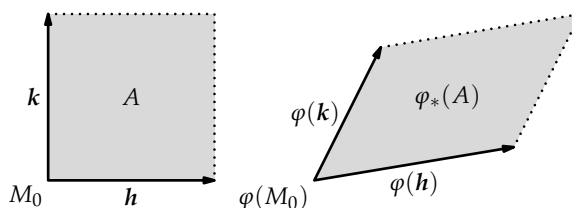
Effet sur les aires

50. ▷ Suite de [48] – Soit $D \subset V$, une partie simple. Si l'image réciproque Δ de D par φ est une partie simple, alors l'aire de D est donnée par

$$v_2(D) = \iint_{\Delta} |\text{Jac } \varphi(u, v)| du dv.$$

51. Changement de variables linéaire [49]

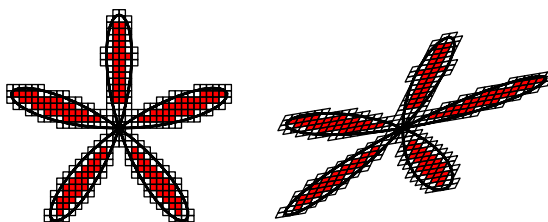
51.1 Un changement de variables linéaire transforme un carré en un parallélogramme



et le déterminant de φ donne le rapport des aires de ces deux quadrilatères :

$$v_2(\varphi_*(A)) = |\det \varphi| v_2(A).$$

51.2 Chaque partie simple pouvant être approchée, avec une précision arbitrairement grande, par des familles de carrés, on comprend que cette formule s'étende à toute partie simple A .



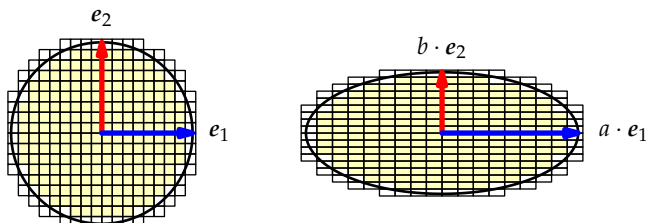
52. Exemples

52.1 Le disque elliptique

$$D = \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right]$$

est l'image du disque unité $\Delta = [u^2 + v^2 \leq 1]$ par le changement de variables

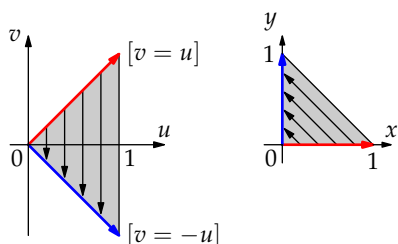
$$(x, y) = \varphi(u, v) = (au, bv).$$



Le jacobien de φ est égal à ab , donc l'aire du disque elliptique est égale à πab .

52.2 Le triangle $D = [x \geq 0] \cap [x \leq x + y \leq 1]$ est l'image du triangle $\Delta = [0 \leq u \leq 1] \cap [-u \leq v \leq u]$ par le changement de variables linéaire φ défini par

$$(u, v) = \varphi^{-1}(x, y) = (x + y, x - y).$$



Le jacobien de φ est égal à $1/2$, donc l'aire de D est la moitié de l'aire de Δ et

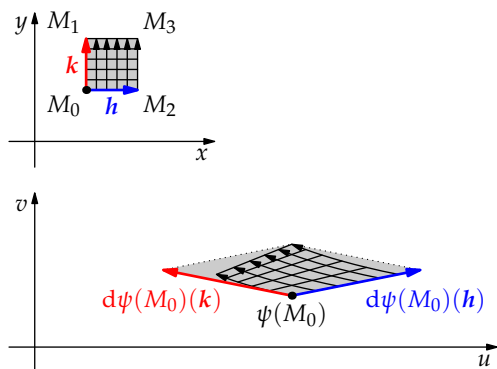
$$\iint_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{-u}^u u^2 e^{uv} dv \right) du = \frac{\text{ch } 1 - 1}{2}.$$

53. Changement de variables non linéaire

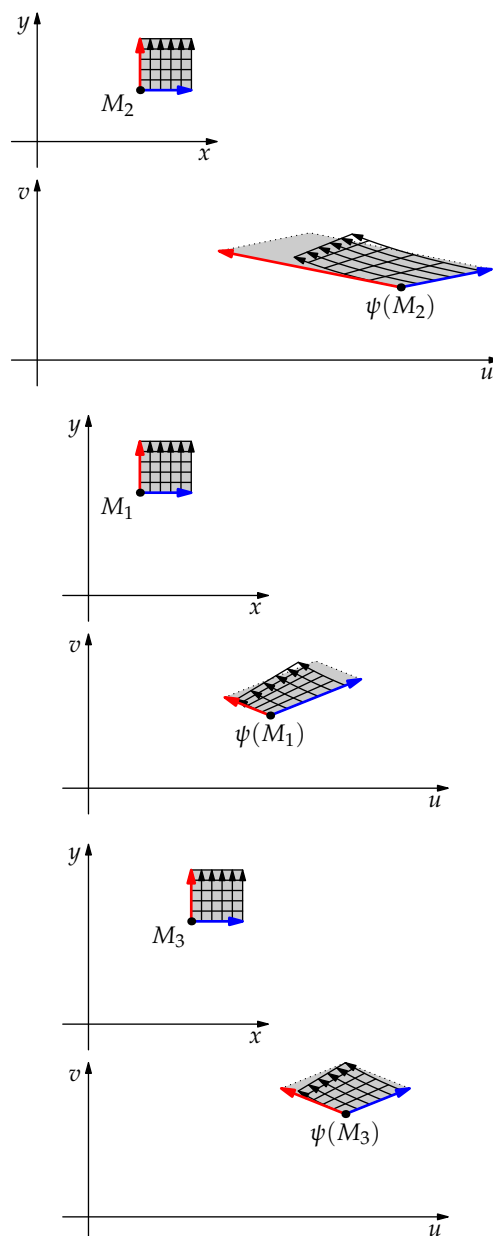
53.1 Localement, un changement de variables non linéaire est peu différent d'un changement de variables affine :

$$\psi(M) \approx \psi(M_0) + d\psi(M_0)(M_0 M)$$

et l'image par ψ d'un carré assez petit est peu différente de l'image de ce carré par l'application linéaire tangente $d\psi(M_0)$.



53.2 Comme le difféomorphisme ψ n'est pas linéaire, l'application linéaire tangente $d\psi(M_0)$ varie en fonction de M_0 , donc la forme et l'aire du parallélogramme varient aussi en fonction de M_0 . $\rightarrow$ [54.1]



53.3 En interprétant $dx dy$ comme l'aire d'un carré ayant le point $M_0 = (x_0, y_0)$ pour sommet et de côtés dx et dy et en considérant que $du dv$ est l'aire de l'image par ψ de ce carré, alors

$$du dv \approx |\det(d\psi(M_0))| dx dy = \frac{dx dy}{|\text{Jac } \varphi(u_0, v_0)|}$$

où $(u_0, v_0) = \psi(M_0)$.

Cette interprétation légitime la formule

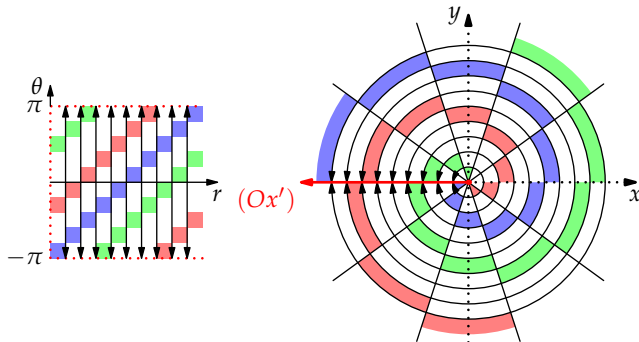
$$\iint_{(x,y) \in D} dx dy = \iint_{\varphi(u,v) \in D} |\text{Jac } \varphi(u, v)| du dv$$

ainsi que le théorème [48].

54. Coordonnées polaires**54.1 L'application**

$$\varphi = [(r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)]$$

est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite $(Ox') = [y = 0] \cap [x \leq 0]$.



Le jacobien de φ est égal à r , ce qui conduit à associer [53.3] les aires élémentaires

$$dx dy \quad \text{et} \quad r dr d\theta.$$

54.2 → Si un domaine du plan est représenté par la partie simple D en coordonnées cartésiennes et par la partie simple Δ en coordonnées polaires, alors

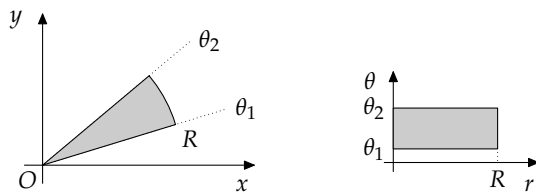
$$\iint_{(x,y) \in D} f(x, y) dx dy = \iint_{(r,\theta) \in \Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

54.3 Précision

La bijection réciproque de φ ne peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

On devrait donc n'appliquer le théorème de changement de variables [54.2] que si le domaine d'intégration D ne rencontrait pas la demi-droite (Ox') .

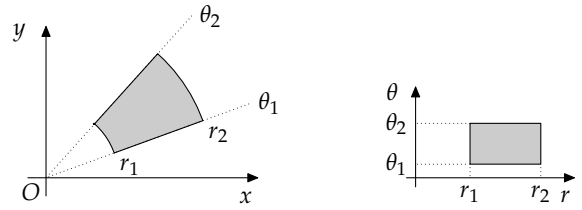
On appliquera malgré tout la formule, comme si le domaine d'intégration était privé de la demi-droite (Ox') , négligeable du point de vue de l'intégrale double, sans s'inquiéter du fait que le domaine d'intégration n'est alors plus une partie simple (il n'est plus fermé).

55. Représentation polaire de parties simples**55.1 L'aire du secteur angulaire**

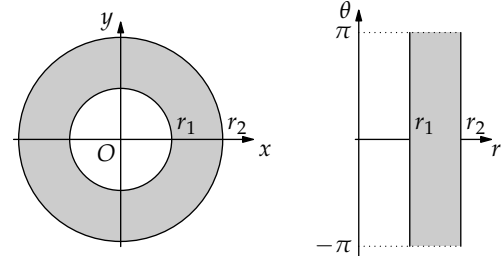
est donnée par

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^R r dr d\theta = (\theta_2 - \theta_1) \frac{R^2}{2}.$$

On en déduit que l'aire du secteur



est égale à $\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)(r_2^2 - r_1^2)$ et que l'aire de l'anneau

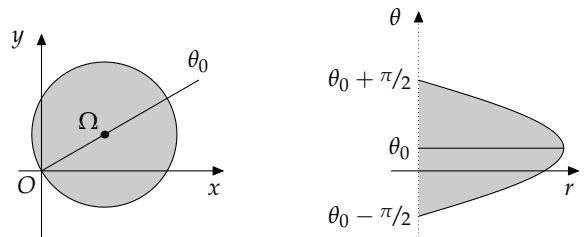


est égale à $\pi(r_2^2 - r_1^2)$.

55.2 La partie simple définie en coordonnées polaires par

$$[r \leq d \cos(\theta - \theta_0)]$$

est un disque [27.99.2] de diamètre d .



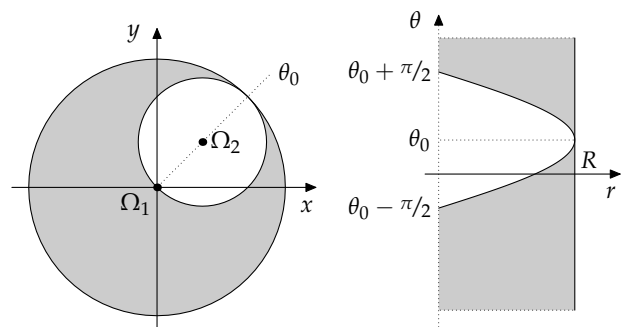
Son aire est connue :

$$\frac{\pi d^2}{4} = \int_{\theta_0 - \pi/2}^{\theta_0 + \pi/2} \frac{1}{2} d^2 \cos^2(\theta - \theta_0) d\theta.$$

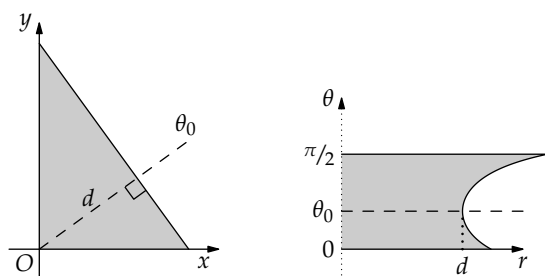
55.3 L'aire de la partie simple définie par

$$[R \cos(\theta - \theta_0) \leq r \leq R]$$

est égale à $\frac{3}{4}\pi R^2$.



55.4 Soit $0 < \theta_0 < \pi/2$. La partie simple définie en coordonnées polaires par $\Delta = [r \cos(\theta - \theta_0) \leq d] \cap [0 \leq \theta \leq \pi/2]$ est un triangle [27.98] dont l'aire est égale à $d^2 / \sin 2\theta_0$.

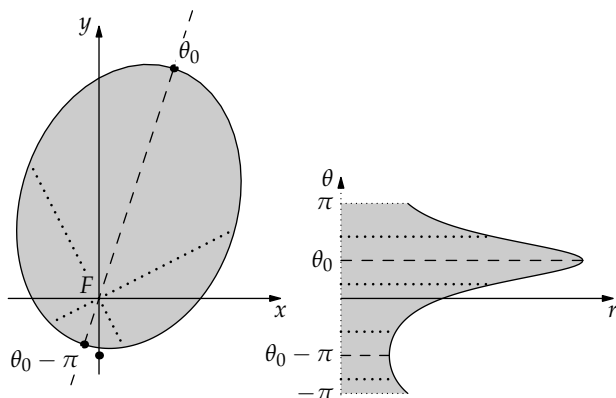


55.5 Pour tout $0 < e < 1$, la partie simple définie en coordonnées polaires par

$$\left[r \leq \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \right]$$

est un disque elliptique [27.100.1] dont l'aire est [52.1]

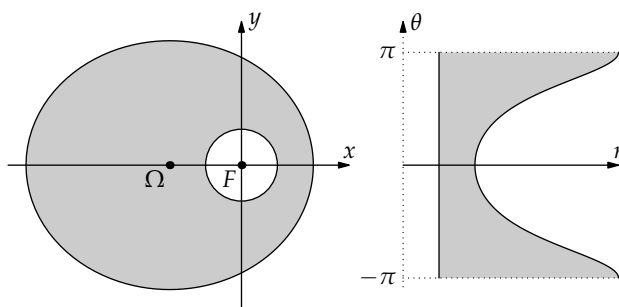
$$\pi ab = \frac{\pi p^2}{(1 - e^2)^{3/2}}.$$



55.6 L'aire de la partie simple définie en coordonnées polaires par

$$\left[1 \leq r \leq \frac{6}{2 + \cos \theta} \right]$$

est égale à $(8\sqrt{3} - 1)\pi$.



56. Symétries

Une symétrie orthogonale ou une rotation φ est un changement de variables linéaire qui conserve les aires [51.1].

56.1 Si f est invariante par φ :

$$\forall (u, v) \in \Delta, \quad f(\varphi(u, v)) = f(u, v)$$

alors

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f(u, v) du dv$$

où $D = \varphi_*(\Delta)$.

56.2 Si Δ est invariant par φ , c'est-à-dire $\Delta = \varphi_*(\Delta)$, et si en outre

$$\forall (u, v) \in \Delta, \quad f(\varphi(u, v)) = -f(u, v)$$

alors

$$\iint_\Delta f(x, y) dx dy = 0.$$

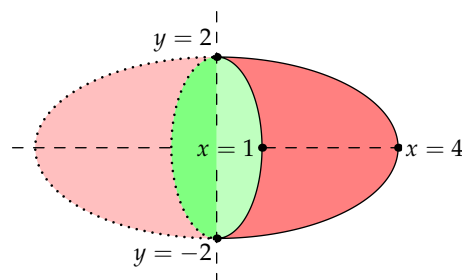
57. Exemples d'arguments de symétrie

57.1 L'aire de

$$A = [y \geq 0] \cap [4x^2 + y^2 \geq 4] \cap [x^2 + 4y^2 \leq 16]$$

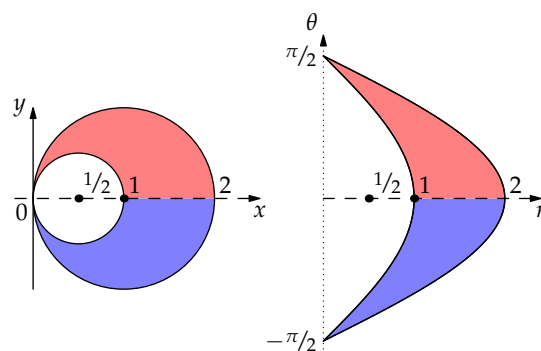
est égale à 3π .

→[52.1]



57.2 Soit $A = [x^2 + y^2 \geq x] \cap [x^2 + y^2 \leq 2x]$.

→[55.2]



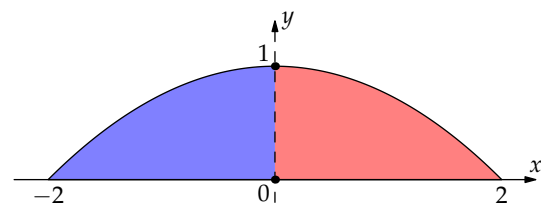
Par symétrie,

$$\iint_A \frac{x-y}{x^2+y^2} dx dy = 2 \iint_{A \cap [y \geq 0]} \frac{x}{x^2+y^2} dx dy$$

et, en passant aux coordonnées polaires,

$$\iint_{A \cap [y \geq 0]} \frac{x}{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

57.3 Soit $A = [0 \leq 4y \leq 4 - x^2]$.



Par symétrie,

$$\iint_A (x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_0^2 \left(\int_0^{1-x^2/4} (x^2 + y^2) dy \right) dx = \frac{96}{35}.$$

57.4 On considère la fonction définie par

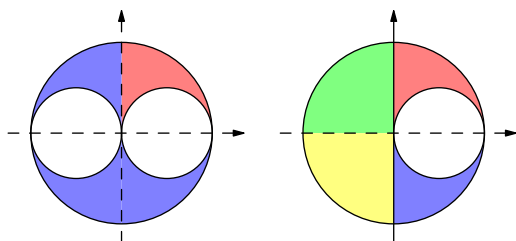
$$f(x, y) = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

1. Avec $A = [|x| \leq x^2 + y^2 \leq 1]$,

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = 4 \int_0^{\pi/2} \left(\int_{\cos \theta}^1 \frac{r \, dr}{(1+r^2)^2} \right) d\theta = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \pi.$$

2. Avec $B = [x \leq x^2 + y^2 \leq 1]$,

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy = 2 \iint_{B \cap [y \geq 0]} f(x, y) \, dx \, dy = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$



Entraînement

58. Questions pour réfléchir

- Soient U , un ouvert de $E = \mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \rightarrow E$, une application de classe $\mathcal{C}^1$. Comment justifier que $V = \varphi_*(U)$ est un ouvert de E et que φ est un difféomorphisme de U sur V ?
- Le changement de variables doit-il être choisi en fonction de l'intégrande ou en fonction du domaine d'intégration?
- Comparer la formule du changement de variable pour une intégrale double avec la formule du changement de variable pour une intégrale simple.
- Interpréter géométriquement la bilinéarité de l'application $\text{Det} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.
- Suite de [55.3] – Expliquer géométriquement l'égalité

$$\int_{\theta_0 - \pi/2}^{\theta_0 + \pi/2} \sin^2(\theta - \theta_0) \, d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

6. Suite de [56] – Un changement de variables linéaires φ qui conserve les aires est-il nécessairement une isométrie?

59. Suite de [55.4] –

$$\forall 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta - \theta_0)} = \frac{2}{\sin 2\theta_0}$$

60. Suite de [55.5] –

$$\forall 0 < e < 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{1}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

61. L'aire de la partie simple

$$[x^2 + y^2 \leq 8] \cap [x^2 + y^2 \geq 2(x + y)]$$

est égale à 6π .

→[55.3]

62. Intégrales sur un disque

On calcule en général une intégrale sur le disque unité

$$D = [x^2 + y^2 \leq 1] = [0 \leq r \leq 1] \cap [-\pi \leq \theta \leq \pi]$$

en passant en coordonnées polaires.

62.1

$$\iint_D \frac{dx \, dy}{1 + x^2 + y^2} = 2\pi \int_0^1 \frac{r \, dr}{1 + r^2} = \pi \ln 2.$$

62.2

$$\iint_D (x + y)^2 \, dx \, dy = \frac{\pi}{2}.$$

- 62.3 Par symétrie,

$$\iint_D (x^2 - y^2) \, dx \, dy = \iint_D x^2 y \, dx \, dy = 0.$$

- 62.4 Par symétrie,

$$\iint_D |x| + |y| \, dx \, dy = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 (\cos \theta + \sin \theta) \, dr \, d\theta = \frac{8}{3}.$$

63. Intégrales sur un disque elliptique

On calcule en général une intégrale sur le disque elliptique

$$A = \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right]$$

à l'aide du changement de variables suggéré par [52.1] et défini par :

$$\varphi(r, \theta) = (ar \cos \theta, br \sin \theta),$$

qui représente A par le rectangle $[0, 1] \times [-\pi, \pi]$.

→[54.3]

- 63.1 Par symétrie,

$$\begin{aligned} \iint_A |xy| \, dx \, dy &= 4(ab)^2 \left(\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) \\ &= \frac{a^2 b^2}{2}. \end{aligned}$$

- 63.2

$$\begin{aligned} \iint_A (x^2 + y^2) \, dx \, dy &= 4(a^2 + b^2)ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta \int_0^1 r^3 \, dr \\ &= \frac{\pi(a^2 + b^2)ab}{4}. \end{aligned}$$

- 63.3

$$\iint_A \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy = 2\pi ab \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} \, r \, dr = \frac{2\pi ab}{3}.$$

64. Suite de [52.2] –

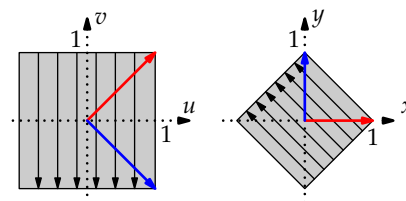
1. Le carré

$$D = [|x + y| \leq 1] \cap [|x - y| \leq 1]$$

est l'image du carré

$$\Delta = [-1 \leq u \leq 1] \cap [-1 \leq v \leq 1]$$

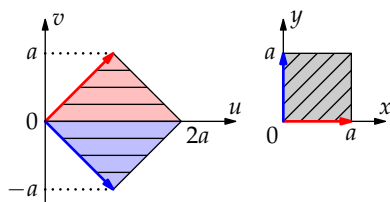
par φ .



$$\iint_D \ln(1 + x + y) \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \ln(1 + u) \, du = 2(\ln 2 - 1).$$

2. Si f est continue et paire sur $[-a, a]$, alors

$$\iint_{[0,a] \times [0,a]} f(x-y) \, dx \, dy = 2 \int_0^a (a-v) f(v) \, dv.$$

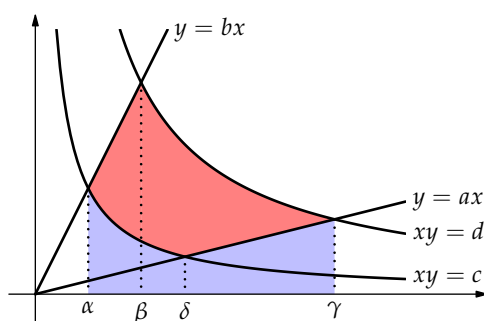


65. On cherche à calculer l'aire de la partie simple

$$A = [ax \leq y \leq bx] \cap [c \leq xy \leq d].$$

- 65.1 L'aire est donnée par

$$\int_{\alpha}^{\beta} bx \, dx + \int_{\beta}^{\gamma} \frac{d \, dx}{x} - \int_{\alpha}^{\delta} \frac{c \, dx}{x} - \int_{\delta}^{\gamma} ax \, dx.$$

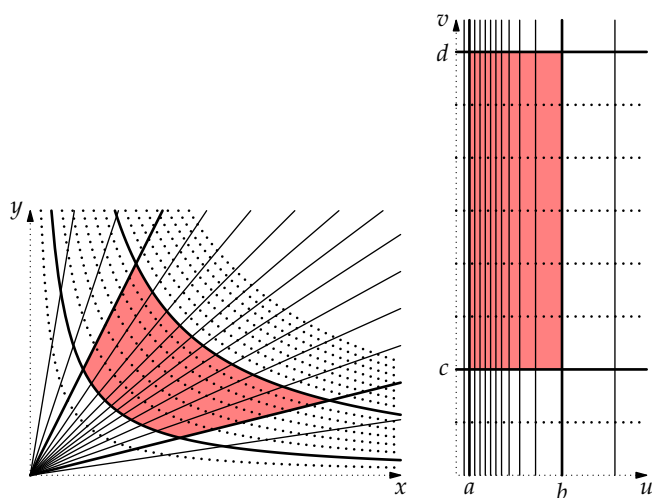


- 65.2 L'application

$$\psi = \left[(x, y) \mapsto (u, v) = \left(\frac{y}{x}, xy \right) \right]$$

est un difféomorphisme de $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ sur Ω . Son jacobien est égal, en valeur absolue, à $2v$ et l'image de A par ψ est le rectangle $[a, b] \times [c, d]$, donc

$$\iint_A dx \, dy = \left(\int_a^b du \right) \left(\int_c^d \frac{dv}{2v} \right) = \frac{1}{2} (d - c) \ln \frac{b}{a}.$$



Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

66. Exemples et contre-exemples

- Exemple de partie élémentaire non convexe? non étoilée?
- Exemple de partie élémentaire dont l'image par une rotation (bien choisie) n'est plus une partie élémentaire?
- Exemple de partie simple et connexe par arcs dont les intersections avec toutes les droites horizontales et verticales soient des segments (éventuellement vides) et qui ne soit pas une partie élémentaire.
- Exemple de partie compacte de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas une partie simple.

67. Questions pour réfléchir

- Dans quelle mesure la linéarité [9] et l'additivité [42] de l'intégrale expriment-elles la même propriété?
- Soient A , une partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$ contenue dans le pavé $I \times J$. Toute fonction continue $f : A \rightarrow E$ peut être prolongée en une fonction continue sur $I \times J$.
- Soit A , une partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions φ et ψ continues sur $\mathbb{R}^2$, positives, nulles en dehors d'un compact K et telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq \varphi(x, y) \leq \mathbb{1}_A(x, y) \leq \psi(x, y)$$

et que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \psi(x, y) \, dx \, dy - \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) \, dx \, dy \leq \varepsilon.$$

Approfondissement

68. Suite de [23.1] – Quels que soient les réels strictement positifs a, b, α et β ,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{bx} - e^{ax}}{x} \, dx = \int_a^b \frac{e^{\beta x} - e^{\alpha x}}{x} \, dx.$$

On peut retrouver cette identité en calculant la dérivée de

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{e^{xt}}{t} \, dt.$$

69. Pour tout $a > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{e^{ax} - 1 - ax}{x^2} e^{-ax} \, dx &= \iint_{[0,a] \times [0,a]} ye^{-xy} \, dx \, dy \\ &= \frac{e^{-a^2} - 1 + a^2}{a}. \end{aligned}$$

- 70.1 Soient φ et ψ , deux fonctions continues sur $[a, b]$.

1. L'intégrale double

$$\iint_{[a,b] \times [a,b]} [\varphi(x) - \varphi(y)] [\psi(x) - \psi(y)] \, dx \, dy$$

est égale à

$$2(b-a) \int_a^b \varphi(x) \psi(x) \, dx - 2 \int_a^b \varphi(x) \, dx \int_a^b \psi(x) \, dx.$$

2. Si φ et ψ sont toutes les deux croissantes, alors

$$\int_a^b \varphi(x) \, dx \int_a^b \psi(x) \, dx \leq (b-a) \int_a^b \varphi(x) \psi(x) \, dx.$$

3. Quelles que soient les variations de φ ,

$$\left[\int_a^b \varphi(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b \varphi(x)^2 dx$$

avec égalité si, et seulement si, φ est une fonction constante.

70.2 L'ensemble V des fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$ est un sous-espace affine de codimension 2 de $\mathcal{C}^1([a, b])$ et

$$\min_{f \in V} \int_a^b [f'(x)]^2 dx = \frac{(\beta - \alpha)^2}{b - a}$$

avec égalité si, et seulement si, f est affine.

71. Si $A = [x^2 + y^2 \leq x + y]$, alors [55.2]

$$\begin{aligned} \iint_A (x + y) dx dy &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \cos^3(\theta - \pi/4) (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

72. Barycentres [43]

Par analogie avec les parties finies, le **barycentre** d'une partie simple A du plan est le point G de coordonnées

$$x_G = \frac{1}{v_2(A)} \iint_A x dx dy \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{v_2(A)} \iint_A y dx dy.$$

72.1 Le barycentre de A est l'unique point G tel que

$$\iint_{M(x,y) \in A} \mathbf{GM} dx dy = \mathbf{0}.$$

72.2 Associativité du barycentre

Soient $A_1, \dots, A_n$, des parties élémentaires d'intérieurs deux à deux disjoints, de barycentres respectifs $G_1, \dots, G_n$.

Le barycentre G de l'union de ces parties élémentaires est le barycentre des points pondérés

$$(G_1, v_2(A_1)), (G_2, v_2(A_2)), \dots, (G_n, v_2(A_n))$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^n v_2(A_k) \cdot \mathbf{GG}_k = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \mathbf{G} = \sum_{k=1}^n \frac{v_2(A_k)}{v_2(A)} \mathbf{G}_k.$$

72.3 Soient D_0 , une droite vectorielle et φ_0 , la symétrie orthogonale d'axe D_0 .

1. Il existe une forme linéaire f_0 telle que

$$\forall M \in \mathbb{R}^2, \quad f_0(M) = 0 \iff M \in D_0.$$

2.

$$f_0(G) = \frac{1}{v_2(A)} \iint_A f_0(x, y) dx dy$$

3. Si la partie A admet la droite D_0 pour axe de symétrie, alors son barycentre appartient à D_0 .

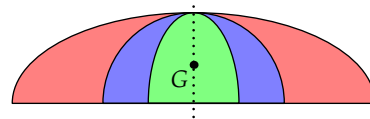
4. Si la partie A admet un centre de symétrie (cas d'un disque circulaire ou elliptique), alors le barycentre est le centre de symétrie.

72.4 Suite de [45] – Le barycentre de A est l'origine.

72.5 Suite de [52.1] – Le barycentre du demi-disque elliptique

$$A = \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right] \cap [y \geq 0]$$

est situé sur l'axe des ordonnées.

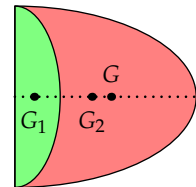


Son ordonnée est égale à $4b/3\pi$, quelle que soit la valeur de a .

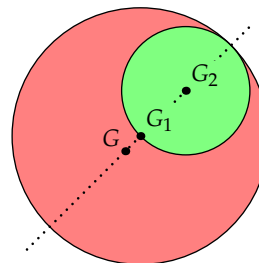
72.6 Suite de [57.1] – Le barycentre G de A vérifie

$$8 \cdot \mathbf{GG}_2 - 2 \cdot \mathbf{GG}_1 = \mathbf{0}$$

donc $G = (20/3\pi, 0)$.



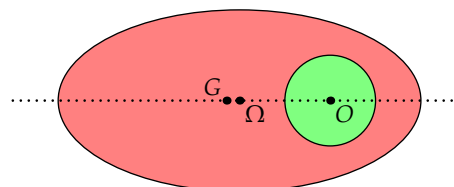
72.7 Le barycentre de $[x^2 + y^2 \leq 8] \cap [x^2 + y^2 \geq 2x + 2y]$ est le point $G = 4/3 G_1 - 1/3 G_2 = (-1/3, -1/3)$.



72.8 Le barycentre de

$$[x^2 + y^2 \geq 1] \cap [(x+2)^2 + 4y^2 \leq 4]$$

a pour coordonnées $(-16/7, 0)$.



Pour aller plus loin

Définitions de l'intégrale double sur un rectangle

73. On travaille sur le rectangle $R = I_1 \times I_2$.

Pour tout intervalle I , on note $\mathfrak{S}(I)$, l'ensemble des segments J contenus dans I .

74. Cas des fonctions positives [73]

74.1 Si f est continue et positive sur R , alors l'ensemble

$$\left\{ \iint_{J_1 \times J_2} f(x, y) dx dy, \quad J_1 \in \mathfrak{S}(I_1), J_2 \in \mathfrak{S}(I_2) \right\}$$

est une partie bornée de $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, f est intégrable sur $I_1 \times I_2$.

74.2 Si f est une fonction intégrable et positive sur le rectangle R , alors son intégrale est définie par :

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \sup_{\substack{J_1 \in \mathfrak{S}(I_1) \\ J_2 \in \mathfrak{S}(I_2)}} \iint_{J_1 \times J_2} f(x, y) dx dy.$$

74.3 L'intégrale de la fonction nulle est nulle.

74.4 Si le rectangle R est un pavé, la définition [74.2] de l'intégrale sur le rectangle R est cohérente avec la définition [4] de l'intégrale sur un pavé.

74.5 Si f est une fonction continue et positive sur R , alors

$$\iint_R f \, dx \, dy = \sup_{K \in \mathcal{K}(R)} \iint_K f \, dx \, dy,$$

où $\mathcal{K}(R)$ désigne l'ensemble des parties compactes $K \subset R$.

74.6 Peut-on définir l'intégrale d'une fonction continue, positive mais pas intégrable ?

75. **Cas des fonctions réelles ou complexes [73]**

75.1 $\Rightarrow$ Si $f : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction intégrable à valeurs réelles sur le rectangle $R = I_1 \times I_2$, alors son intégrale est définie par :

$$\iint_R f \, dx \, dy = \iint_R f^+ \, dx \, dy - \iint_R f^- \, dx \, dy.$$

75.2 La définition [75.1] de l'intégrale d'une fonction intégrable à valeurs réelles a bien un sens. Elle est cohérente avec la définition [74.2] de l'intégrale d'une fonction positive.

75.3 $\Rightarrow$ Si $f : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction intégrable à valeurs complexes sur le rectangle R , alors son intégrale est définie par :

$$\iint_R f \, dx \, dy = \iint_R (\Re f) \, dx \, dy + i \iint_R (\Im f) \, dx \, dy.$$

75.4 Soit $f : R \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction intégrable sur R . Alors

$$\Re \left(\iint_R f \, dx \, dy \right) = \iint_R (\Re f) \, dx \, dy$$

et

$$\Im \left(\iint_R f \, dx \, dy \right) = \iint_R (\Im f) \, dx \, dy.$$

75.5 La définition [75.3] de l'intégrale d'une fonction intégrable à valeurs complexes a bien un sens. Elle est cohérente avec la définition [75.1] de l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles.

75.6 Comment étendre la notion d'intégrale double aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie ?

76. **Linéarité [73]**

76.1 Soient h_1 et h_2 , deux fonctions positives et intégrables sur le rectangle $R = I_1 \times I_2$.

1.

$$\iint_R (h_1 + h_2) \, dx \, dy = \iint_R h_1 \, dx \, dy + \iint_R h_2 \, dx \, dy$$

2. La fonction $f = h_1 - h_2$ est intégrable sur R et

$$h_1(x, y) - f^+(x, y) = h_2(x, y) - f^-(x, y) \geq 0$$

pour tout $(x, y) \in R$.

3. Comme $f^+ + h_2 = f^- + h_1$, alors

$$\iint_R f \, dx \, dy = \iint_R h_1 \, dx \, dy - \iint_R h_2 \, dx \, dy.$$

76.2 Si f et g sont deux fonctions à valeurs réelles et intégrables sur R , alors

$$(f + g)^+ = \left[f^+ + g^+ + \frac{|f + g|}{2} \right] - \frac{|f| + |g|}{2},$$

$$(f + g)^- = \left[f^- + g^- + \frac{|f + g|}{2} \right] - \frac{|f| + |g|}{2}$$

et

$$\iint_R (f + g) \, dx \, dy = \iint_R f \, dx \, dy + \iint_R g \, dx \, dy.$$

76.3 Si f et g sont deux fonctions à valeurs complexes et intégrables sur R , alors $\Re(f)$, $\Im(f)$, $\Re(g)$ et $\Im(g)$ sont intégrables sur R et

$$\iint_R (f + g) \, dx \, dy = \iint_R f \, dx \, dy + \iint_R g \, dx \, dy.$$

77. **Intégrale sur une partie élémentaire**

Soient I et J , deux segments et $f : I \times J \rightarrow E$, une fonction continue.

77.1 L'application $F_1 : I \times J \times J \rightarrow E$ définie par

$$\forall (u, v) \in J \times J, \quad F_1(x, u, v) = \int_u^v f(x, y) \, dy$$

et l'application $F_2 : I \times I \times J \rightarrow E$ définie par

$$\forall (s, t) \in I \times I, \quad F_2(s, t, y) = \int_s^t f(x, y) \, dx$$

sont continues.

77.2 Suite de [34] – Les fonctions

$$\left[x \mapsto \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right] \quad \text{et} \quad \left[y \mapsto \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right]$$

sont continues sur I et sur J respectivement et

$$\int_I \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_J \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

78. **Additivité de l'aire**

On a défini [77] l'intégrale sur une partie élémentaire en se ramenant au cas de l'intégration sur un rectangle. Les propriétés de l'intégrale se déduisent donc facilement de la définition, à l'exception de l'additivité.

78.1 Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq m}$ et $(B_j)_{1 \leq j \leq n}$, deux familles de parties élémentaires d'intérieurs deux à deux disjoints. Si

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_m \quad \text{et} \quad B = B_1 \cup \dots \cup B_n$$

sont deux parties d'intérieurs disjoints, alors $A \cup B$ est une partie simple du plan et

$$v_2(A \cup B) = \sum_{i=1}^m v_2(A_i) + \sum_{j=1}^n v_2(B_j) = v_2(A) + v_2(B).$$

78.2 Soient A_1 et A_2 , deux parties élémentaires. On suppose que $B_0 = A_1 \cap A_2$, $B_1 = A_1 \setminus B_0$ et $B_2 = A_2 \setminus B_0$ sont aussi des parties élémentaires. Alors $A_1 \cup A_2$ est une partie simple du plan et

$$v_2(A_1 \cup A_2) = v_2(A_1) + v_2(A_2) - v_2(A_1 \cap A_2).$$

78.3 L'intégrale de f sur une partie simple A est bien définie : elle ne dépend pas de la famille $(A_1, \dots, A_n)$ de parties élémentaires choisie pour décomposer A .

L'additivité [42] en découle.

1. L'espace $E = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. La base canonique de E est notée $(e_1, \dots, e_n)$. On note Ω , un ouvert (non vide) de E .

I

Formes différentielles

2.1 Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de l'ouvert $\Omega \subset E$ dans $\mathbb{R}$, alors sa **différentielle** df est une application continue de Ω dans le dual E^* et, pour tout $M_0 \in \Omega$, l'**application linéaire tangente** $df(M_0)$ est une forme linéaire sur E .

2.2 Si $f \in \mathcal{C}^{k+1}(\Omega, \mathbb{R})$, alors $df \in \mathcal{C}^k(\Omega, E^*)$.

2.3 Soit $M_0 \in \Omega$. Si le point $M \in \Omega$ est proche de M_0 , alors le vecteur $h = MM_0$ est proche du vecteur nul 0_E et

$$f(M) \approx f(M_0) + df(M_0)(h).$$

2.4 Comme la différentielle de f permet de décrire et évaluer les petites variations locales de f , les **formes différentielles** servent à modéliser les petites quantités et l'**intégrale curviligne**, en sommant ces petites quantités, permet de passer du local (échelle microscopique) au global (échelle macroscopique).

3. $\Leftarrow$ Une **forme différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω** est une application $\omega \in \mathcal{C}^k(\Omega, E^*)$.

Décomposition d'une forme différentielle

4. La base canonique de E^* est la base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ de $(e_1, \dots, e_n)$. Pour tout $1 \leq k \leq n$, la forme linéaire e_k^* est définie par

$$\forall x = (x^1, \dots, x^n) \in E, \quad e_k^*(x) = x^k.$$

4.1 Pour tout $1 \leq k \leq n$, la différentielle de e_k^* est une application constante et, en tout point $M_0 \in E$, l'application linéaire tangente à e_k^* au point M_0 est égale à e_k^* :

$$\forall M_0 \in E, \quad de_k^*(M_0) = [x \mapsto x^k].$$

On notera donc

$$(dx^1, \dots, dx^n) \quad \text{au lieu de} \quad (e_1^*, \dots, e_n^*).$$

4.2 Décomposition des formes linéaires

Les formes coordonnées relatives à la base $(dx^1, \dots, dx^n)$ de E^* sont les formes linéaires

$$[f \mapsto f(e_k)] \in L(E^*, \mathbb{R})$$

de telle sorte que

$$\forall f \in E^*, \quad f = \sum_{k=1}^n f(e_k) dx^k.$$

5. Soit $\omega \in \mathcal{C}^k(\Omega, E^*)$.

5.1 Les composantes de ω relatives à la base canonique de E^* sont les applications

$$(1 \leq i \leq n) \quad [M \mapsto \omega(M)(e_i)]$$

5.2 $\rightarrow$ Pour toute forme différentielle $\omega \in \mathcal{C}^k(\Omega, E^*)$, il existe une, et une seule, famille $(P_1, \dots, P_n)$ de fonctions appartenant à $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall M \in \Omega, \forall u \in E, \quad \omega(M)(u) = \sum_{k=1}^n P_k(M) dx^k(u).$$

6. En pratique, on écrira :

6.1 Si $n = 2$,

$$\forall M = (x, y) \in \Omega, \quad \omega(M) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

6.2 Si $n = 3$, pour tout $M = (x, y, z) \in \Omega$,

$$\omega(M) = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

6.3 La forme différentielle ω est de classe $\mathcal{C}^k$ si, et seulement si, ses composantes P, Q et R sont des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de Ω dans $\mathbb{R}$.

Formes exactes

7. Une forme différentielle est, comme son nom l'indique, une application du même genre que la différentielle d'une fonction différentiable [2].

Un enjeu essentiel est de reconnaître les formes différentielles qui sont effectivement des différentielles et peuvent s'écrire sous la forme df , c'est-à-dire de distinguer les quantités infinitésimales qui ne sont que des *quantités infinitésimales* : $\delta Q \dots$ des quantités infinitésimales qui sont en fait des *variations infinitésimales* : $dU \dots$

7.1 $\Leftarrow$ Une forme différentielle $\omega \in \mathcal{C}^0(\Omega, E^*)$ est **exacte** lorsqu'il existe une fonction $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $dF = \omega$.

On dit alors que F est une **primitive** de ω .

7.2 Si $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ est une primitive de ω , alors

$$\forall M \in \Omega, \quad \omega(M) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x^k}(M) dx^k.$$

Entraînement

8. Questions pour réfléchir

1. Qu'est-ce qu'une forme différentielle sur Ω si $n = 1$?
- 2.a Les formes $dx^1, \dots, dx^n$ ne sont pas des formes différentielles.
- 2.b En quel sens peut-on considérer $dx^1, \dots, dx^n$ comme des formes différentielles ?
3. Si $n = 1$, toute forme différentielle continue est exacte.
4. Si une forme différentielle est exacte sur l'ouvert Ω , alors elle est exacte sur tout ouvert contenu dans Ω .
9. Sur $\Omega = \mathbb{R}^2$, la forme différentielle

$$\omega(x, y) = e^y dx + (xe^y - 2y) dy$$

est exacte et admet $F(x, y) = xe^y - y^2$ pour primitive.

10. Sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus [x + y = 0]$, la forme différentielle

$$\omega(x, y) = \frac{y^2}{(x+y)^2} dx + \frac{x^2}{(x+y)^2} dy$$

est exacte et admet $F(x, y) = xy/(x+y)$ pour primitive.

II

Intégrale d'une forme différentielle

11. Une forme différentielle représente une quantité infinitésimale. Son intégrale représente la somme de ces quantités infinitésimales calculée le long d'un chemin donné.

Nous formaliserons ces idées en définissant la **circulation d'un champ de vecteurs** [49].

12.1 Soient $\omega \in \mathcal{C}^0(\Omega, E^*)$, une forme différentielle continue sur Ω et Γ , une courbe paramétrée et orientée par l'arc $([a, b], f)$, contenue dans Ω .

L'intégrale curviligne de ω le long de Γ est définie par

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_a^b \omega(f(t))(f'(t)) dt.$$

12.2 Suite de [5.2] – L'intégrale de ω le long de la courbe Γ paramétrée par

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) = (x_k(t)) \in \Omega$$

est définie par

$$\int_{M \in \Gamma} \sum_{k=1}^n P_k(M) dx^k = \sum_{k=1}^n \int_a^b P_k(x_1(t), \dots, x_n(t)) x'_k(t) dt.$$

12.3 En pratique, l'intégrale de la forme différentielle définie par

$$\forall M \in \Omega, \quad \omega(M) = P(M) dx + Q(M) dy$$

le long de la courbe plane Γ paramétrée par

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) = (x(t), y(t)) \in \Omega$$

est égale à

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_a^b [P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)] dt.$$

13. Effet d'un changement de paramétrage [27.36]

Soient $([a, b], f)$ et $([c, d], g)$, deux paramétrages $\mathcal{C}^1$ -équivalents de la courbe Γ .

13.1 Si les paramétrages sont de même sens, alors

$$\int_a^b \omega(f(t))(f'(t)) dt = \int_c^d \omega(g(t))(g'(t)) dt.$$

13.2 Si les paramétrages sont de sens contraires, alors

$$\int_a^b \omega(f(t))(f'(t)) dt = - \int_c^d \omega(g(t))(g'(t)) dt.$$

14. Cas des formes exactes

14.1 Soient $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $f = (x, y) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ telle que $f(t) \in \Omega$ pour tout $t \in I$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(x(t), y(t)) &= \frac{\partial F}{\partial x}(f(t)) x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(f(t)) y'(t) \\ &= dF(f(t))(f'(t)) \\ &= \langle \nabla F(f(t)) | f'(t) \rangle. \end{aligned}$$

14.2 → Si ω est une forme exacte sur Ω , de primitive F , alors

$$\int_{\Gamma} \omega = F(B) - F(A),$$

quel que soit l'arc Γ d'origine A et d'extrémité B contenu dans Ω .

14.3 ▷ L'intégrale curviligne d'une forme exacte le long d'une courbe fermée est nulle.

Propriétés élémentaires

15. L'intégrale curviligne possède essentiellement les mêmes propriétés que l'intégrale simple.

16. → Linéarité

Si ω_1 et ω_2 sont deux formes différentielles continues sur Ω et si Γ est une courbe contenue dans Ω , alors

$$\int_{\Gamma} (\lambda \omega_1 + \omega_2) = \lambda \int_{\Gamma} \omega_1 + \int_{\Gamma} \omega_2.$$

17. → Additivité

Si ω est une forme différentielle continue sur Ω et si Γ est une courbe contenue dans Ω qui est obtenue par concaténation de deux courbes Γ_1 et Γ_2 , alors

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega.$$

18. Inégalité de la moyenne

18.1 Pour tout $M \in \Omega$, la forme linéaire $\omega(M)$ est continue sur E et $|||\omega(M)|||$ désigne sa norme relativement à la norme euclidienne sur E .

18.2 → Soient ω , une forme différentielle continue sur Ω et Γ , une courbe compacte contenue dans Ω . Alors

$$\left| \int_{\Gamma} \omega \right| \leq \sup_{M \in \Gamma} |||\omega(M)||| \cdot |\Gamma|$$

où $|\Gamma|$ désigne la longueur de la courbe Γ .

Entraînement

19. L'intégrale de la forme différentielle

$$\omega(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

sur le cercle unité paramétré par

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad f(t) = (\cos t, \sin t)$$

est égale à 2π .

20. Soit Γ , le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique. L'intégrale de

$$\omega(x, y) = (x^3 - y) dx + (x + y) dy$$

le long de Γ est égale à

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos^3 t - \sin t)(-\sin t) + (\cos t + \sin t)(\cos t) dt = 2\pi.$$

21. Le cercle $\Gamma = [x^2 + y^2 - 2y = 0]$ est paramétré dans le sens direct par

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f(t) = (\cos t, 1 + \sin t).$$

Si $\omega(x, y) = -x^2 y dx + xy^2 dy$, alors

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t (1 + \sin t) \sin t + \cos^2 t (1 + \sin t)^2 dt = \frac{3\pi}{2}.$$

22. Soit Γ , l'arc de parabole paramétré par $f(t) = (t, t^2)$ pour $t \in [-1, 2]$. Alors

$$\int_{\Gamma} xy dx + (x + y) dy = \int_{-1}^2 t^3 + (t + t^2)(2t) dt = \frac{69}{4}.$$

23. Soit Γ , le carré de sommets $A(1,1)$, $B(1,2)$, $C(2,2)$ et $D(2,1)$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

Si $\omega(x,y) = (x^2 + y) dx + (2x + y^2) dy$, alors

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_0^1 P(1+t,1) dt + \int_0^1 Q(2,1+t) dt - \int_0^1 P(2-t,2) dt - \int_0^1 Q(1,2-t) dt = 1.$$

24. Soit Γ , le demi-cercle paramétré par

$$\forall t \in [0, \pi], \quad f(t) = (a \cos t, a \sin t).$$

Si $\omega(x,y) = x^2 y dx + xy(2a - y) dy$, alors

$$\int_{\Gamma} \omega = a^4 \int_0^{\pi} -\cos^2 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin t (2 - \sin t) dt = \frac{16 - 3\pi}{12} a^4.$$

25. Exemple de forme exacte

Soient $A = (1,0)$ et $B = (0,1)$.

1. L'intégrale de la forme

$$\omega(x,y) = (x+y) dx + (x-y) dy$$

sur le quart de cercle Γ_1 paramétré par

$$\forall t \in [0, \pi/2], \quad f(t) = (\cos t, \sin t)$$

est égale à -1 .

2. Sur le segment Γ_2 paramétré par $f(t) = (1-t, t)$ pour $t \in [0, 1]$,

$$\int_{\Gamma_2} \omega = \int_0^1 (-1 + 1 - 2t) dt = -1.$$

3. Sur la ligne brisée Γ_3 , union du segment $[A, O]$ paramétré par $f(t) = (1-t, 0)$ pour $t \in [0, 1]$ et du segment $[O, B]$ paramétré par $g(t) = (0, t)$ pour $t \in [0, 1]$,

$$\int_{\Gamma_3} \omega = \int_0^1 (1-t)(-dt) + \int_0^1 -t dt = -1.$$

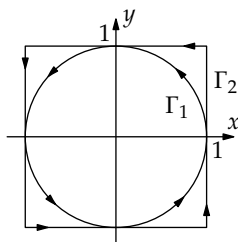
4. Une primitive de ω est la fonction F définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{2} + xy.$$

26. L'intégrale de la forme différentielle

$$\omega(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{x^2+y^2} dy$$

le long du cercle unité Γ_1 et le long du carré Γ_2 est égale à 2π .

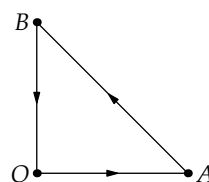


27. Soient $A = (1,0)$ et $B = (0,1)$. L'intégrale de la forme différentielle

$$\omega(x,y) = (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$$

le long du triangle OAB et le long du cercle unité est nulle, mais l'intégrale le long du cercle de centre A paramétré par

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f(t) = (1 + \cos t, \sin t)$$



est égale à 2π .

28. Le cercle $\Gamma = [x+z=a] \cap [x^2+y^2+z^2=a^2]$ a pour centre $A = (a/2, 0, a/2)$ et pour rayon $r_0 = a/\sqrt{2}$.

Si Γ est orienté par le vecteur $n = (1, 0, 1)$, alors [18.104] il est paramétré par

$$f(t) = A + r_0 \cos t \cdot (0, 1, 0) + \frac{a}{2} \sin t \cdot (-1, 0, 1)$$

pour $t \in [-\pi, \pi]$ et l'intégrale de la forme

$$\omega(x,y,z) = y dx + z dy + x dz$$

le long de Γ est égale à $-\pi a^2/\sqrt{2}$.

29. Le cercle $\Gamma = [x+y+z=1] \cap [x^2+y^2+z^2=1]$ a pour centre $A = 1/3 \cdot (1, 1, 1)$ et pour rayon $r_0 = \sqrt{2}/3$.

1. Si Γ est orienté par le vecteur $n = (1, 1, 1)$, alors [18.104] il est paramétré par

$$f(t) = A + \frac{r_0}{\sqrt{2}} \cos t \cdot (1, -1, 0) + \frac{r_0}{\sqrt{6}} \sin t \cdot (1, 1, -2)$$

pour $t \in [-\pi, \pi]$.

2. L'intégrale de la forme

$$\omega(x,y,z) = (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz$$

le long de Γ est égale à $-4\pi/\sqrt{3}$.

3. La forme

$$\omega(x,y,z) = (y-z) dx + (x-z) dy - (x+y) dz$$

est exacte. Elle admet $F(x,y,z) = xy - yz - xz$ pour primitive et son intégrale le long de Γ est nulle.

III

Formes différentielles fermées

30. On cherche une méthode pour reconnaître les formes différentielles exactes.

30.1 Suite de [5.2] – Si la forme différentielle $\omega \in \mathcal{C}^1(\Omega, E^*)$ est exacte, alors

$$\forall M \in \Omega, \forall 1 \leq i, j \leq n, \quad \frac{\partial P_i}{\partial x^j}(M) = \frac{\partial P_j}{\partial x^i}(M).$$

30.2 $\Leftrightarrow$ La forme différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ définie par

$$\forall M \in \Omega, \quad \omega(M) = \sum_{k=1}^n P_k(M) dx^k$$

est fermée lorsque

$$\forall M \in \Omega, \forall 1 \leq i, j \leq n, \quad \frac{\partial P_i}{\partial x^j}(M) = \frac{\partial P_j}{\partial x^i}(M).$$

30.3 Forme fermée en dimension 2

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, la forme différentielle $\omega = P dx + Q dy$ est fermée si, et seulement si,

$$\forall M \in \Omega, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(M) = \frac{\partial Q}{\partial x}(M).$$

30.4 Forme fermée en dimension 3

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, la forme différentielle $\omega = P dx + Q dy + R dz$ est fermée si, et seulement si,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

sur Ω .

31.1 Suite de [20] – La forme ω n'est pas fermée.

31.2 Suite de [21] – La forme ω n'est pas fermée.

31.3 Suite de [23] – La forme ω n'est pas fermée.

31.4 La forme $\omega(x, y) = y(x+1) dx$ n'est pas exacte.

31.5 La forme $\omega(x, y) = y^2 dx + x^2 dy$ n'est pas exacte.

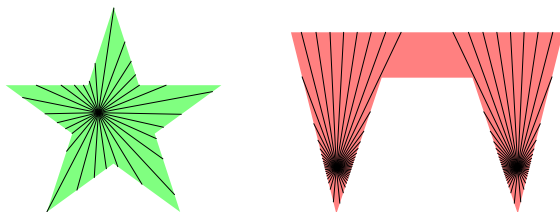
31.6 La forme $\omega(x, y) = (x^3 - y) dx + (x + y) dy$ n'est pas exacte.

Parties étoilées

32. $\nRightarrow$ Un ouvert Ω de E est **étoilé** lorsqu'il existe un point $O \in \Omega$ tel que $[O, M] \subset \Omega$ pour tout point $M \in \Omega$.

33. $\rightarrow$ Les parties convexes de $\mathbb{R}^2$ sont étoilées.

34. Exemple et contre-exemple de parties étoilées

**Théorème de Poincaré**

35. $\triangleright$ Toute forme différentielle exacte est fermée.

36. Le théorème de Poincaré [37] donne une condition suffisante simple pour qu'une forme fermée soit exacte.

37. $\rightarrow$ Si $\omega \in \mathcal{C}^1(\Omega, E^*)$ est une forme différentielle fermée et si l'ouvert Ω est étoilé, alors ω est une forme différentielle exacte.

38. Contre-exemple fondamental

Sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, la forme différentielle

$$\omega(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

est fermée, mais pas exacte [19].

Entraînement

39. Calculs de primitives

Si l'ouvert Ω est rectangulaire et si

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial G}{\partial x}(x, y)$$

alors [20.109.2] il existe une fonction g telle que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad F(x, y) = G(x, y) + g(y).$$

39.1 La forme différentielle

$$\omega(x, y) = e^y dx + (xe^y - 2y) dy$$

est fermée sur $\Omega = \mathbb{R}^2$. Elle admet $F(x, y) = xe^y - y^2$ pour primitive.

39.2 La forme différentielle

$$\omega(x, y) = \frac{3x^2 + y^2}{y^2} dx - \frac{2x^3}{y^3} dy$$

est fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus [y = 0]$ et admet $F(x, y) = x + x^3/y^2$ pour primitive.

39.3 La forme différentielle

$$\omega(x, y) = \frac{2x}{y} dx + \frac{1 - x^2}{y^2} dy$$

est fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus [y = 0]$. Elle admet $F(x, y) = (x^2 - 1)/y$ pour primitive.

39.4 La forme différentielle

$$\omega(x, y) = \text{Arctan} \frac{y}{x} dx + \ln \sqrt{x^2 + y^2} dy$$

est fermée sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus [x = 0]$. Elle admet

$$F(x, y) = x \text{Arctan} \frac{y}{x} + y \ln \sqrt{x^2 + y^2} - y$$

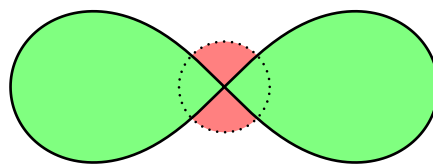
pour primitive.

IV**Théorème de Green-Riemann**

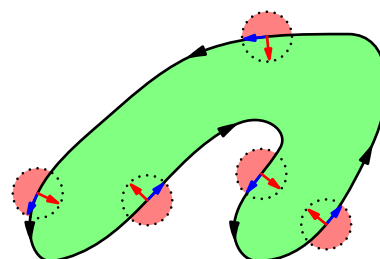
40. On considère une partie compacte K de E dont la frontière ∂K est la réunion des supports d'un nombre fini d'arcs paramétrés continus et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

40.1 On suppose que, pour tout point régulier $M_0 \in \partial K$, il existe une boule V_0 centrée en M_0 telle que $V_0 \cap K$ et $V_0 \cap K^c$ soient connexes par arcs. Une telle partie K est appelée un **compact à bord**.

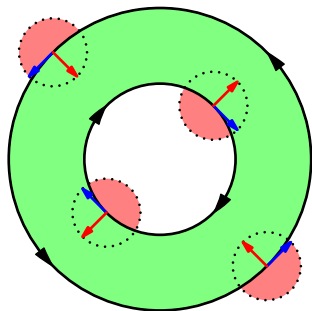
La partie du plan limitée par une courbe analogue à la **lemniscate** [27.108] n'est pas un compact à bord.



40.2 On suppose enfin que la frontière peut être paramétrée de telle sorte que, pour tout point $M_0 \in \partial K$, il existe un scalaire $\lambda_0 > 0$ assez petit pour que le vecteur $M_0 + \lambda_0 \cdot N$ appartienne à K (où (T, N) est la base de Frenet au point M_0). Cela signifie concrètement que le compact K est à gauche de sa frontière lorsqu'on parcourt celle-ci. On dit alors que K est un **compact à bord orienté**.



40.3 La frontière d'un compact à bord orienté n'est pas nécessairement connexe par arcs.



41. → Soient $\omega = P dx + Q dy$, une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et $A \subset \Omega$, une partie compacte à bord orienté. Alors

$$\int_{\partial A} P dx + Q dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

42. On peut lire l'intégrale double comme l'intégrale d'un déterminant.

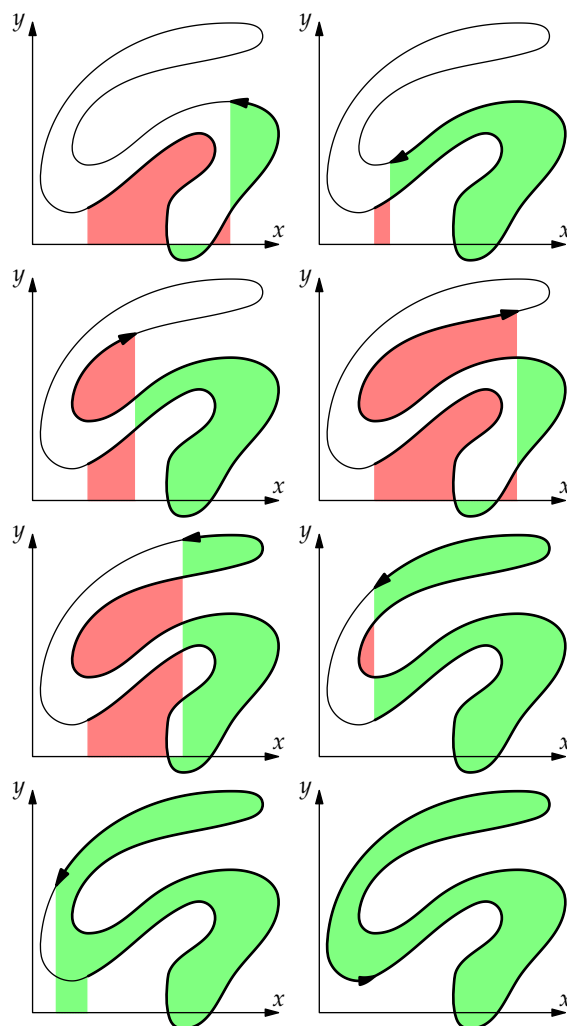
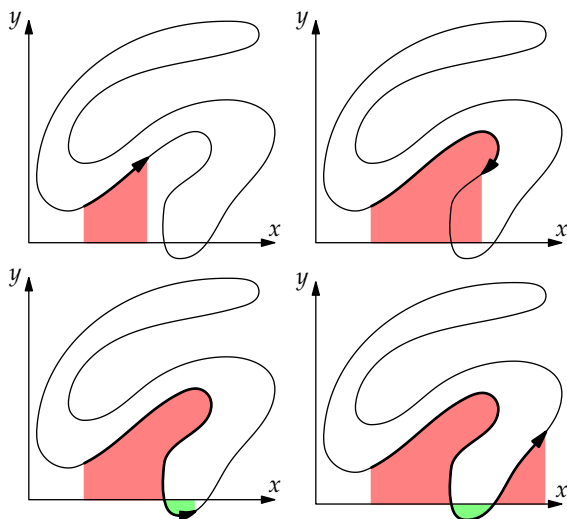
$$\int_{\partial A} P dx + Q dy = \iint_A \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & P \\ \frac{\partial}{\partial y} & Q \end{vmatrix} dx dy$$

Calculs d'aires

43. → L'aire d'une partie compacte à bord orienté A est égale à

$$\int_{\partial A} (-y) dx = \int_{\partial A} x dy = \frac{1}{2} \int_{\partial A} -y dx + x dy.$$

44. L'aire en vert (resp. en rouge) est comptée positivement (resp. négativement).



45. L'aire limitée par l'astroïde paramétrée par

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad f(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$$

est égale à $3\pi/8$.

46. L'aire de l'arche de cycloïde paramétrée par

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

est égale à 3π .

Calcul en coordonnées polaires

Entraînement

47. Questions pour réfléchir

1. Que vaut l'intégrale curviligne de la forme

$$\omega = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

lorsque la courbe Γ est paramétrée en coordonnées polaires ? Cela permet-il d'expliquer pourquoi cette forme fermée n'est pas exacte ?

V

Champs de vecteurs

48. ↯ Un champ de vecteurs sur Ω est une application V de Ω dans E .

À la forme différentielle ω définie par

$$\omega(M) = \sum_{k=1}^n P_k(M) dx^k$$

correspond le champ de vecteurs V défini par

$$V(M) = (P_1(M), \dots, P_n(M)).$$

Si on interprète un champ de vecteurs V comme un champ de forces, la forme différentielle ω qui lui est associée est le travail de ce champ de forces pour un déplacement élémentaire.

Circulation d'un champ de vecteurs

La circulation d'un champ de vecteurs s'interprète comme la quantité d'énergie associée à un déplacement donné dans le domaine Ω sur lequel s'exerce le champ de forces.

49. Soit $V \in \mathcal{C}^0(\Omega, E)$, le champ de vecteurs associé à la forme différentielle $\omega \in \mathcal{C}^0(\Omega, E^*)$. La **circulation de V le long de Γ** (ou le **travail de V le long de Γ**) est l'intégrale curviligne de ω sur Γ .

Champ dérivant d'un potentiel

50. Le champ de vecteurs $V \in \mathcal{C}^0(\Omega, E)$ **dérive du potentiel** U lorsque U est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall M \in \Omega, \quad V(M) = \nabla U(M).$$

Entraînement

51. Questions pour réfléchir

1. La circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe Γ qui dérive d'un potentiel U est égale à la variation du potentiel entre l'origine et l'extrémité de Γ , indépendamment du chemin parcouru entre ces deux points. Que dire de la circulation d'un champ qui dérive d'un potentiel le long d'une courbe fermée ?

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

52. Exemples et contre-exemples

- Exemple de forme différentielle exacte.
- Exemple de forme différentielle exacte sur un ouvert Ω_1 , qui n'est pas exacte sur un ouvert $\Omega_2 \supset \Omega_1$.
- Exemple de forme différentielle fermée qui n'est pas exacte.
- Exemple de forme différentielle qui n'est pas fermée.

53. Méthodes

- Comment démontrer qu'une forme différentielle continue est exacte ?
- Comment démontrer qu'une forme différentielle n'est pas exacte ?

54. Questions pour réfléchir

- Quelle différence entre $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et un espace euclidien de dimension n quelconque ?
- Que signifiaient $dx^1, \dots, dx^n$ dans ce cas ?
- Condition pour que l'intégrale curviligne d'une forme fermée le long d'une courbe fermée soit nulle ?
- Comparer la formule de Green-Riemann et le théorème de Poincaré [37] pour une forme différentielle fermée.

Approfondissement

55. Suite de [31.4] – On note Γ , une courbe fermée simple, parcourue dans le sens trigonométrique.

- Si $\Gamma = [x^2 + y^2 - ax = 0]$, alors

$$\int_{\Gamma} \omega = \frac{\pi a^3}{4}.$$

- Si $\Gamma = [b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2]$, alors $\int_{\Gamma} \omega = 0$.

- Si $\Gamma = [b^2x^2 + a^2y^2 - 2ab^2x - 2a^2by = 0]$, alors

$$\int_{\Gamma} \omega = \frac{\pi ab(a-b)}{\sqrt{2}}.$$

4. L'intégrale de ω le long d'un cercle Γ est nulle si, et seulement si, le centre du cercle est situé sur la diagonale $[y = x]$.

56.1 Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que la forme différentielle

$$\omega(x, y) = e^x f(y) dx + e^x g(x) dy$$

soit exacte, alors il existe trois constantes K_1, K_2 et K_3 telles que

$$F(x, y) = K_1 ye^x + K_2 e^x + K_3 y$$

soit une primitive de ω .

56.2 Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que la forme différentielle

$$\omega(x, y, z) = 2xz dx + f(y)g(z) dy + \left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right) dz$$

soit exacte, alors f est linéaire, g est affine et il existe une constante K telle que

$$F(x, y, z) = x^2 z + \frac{1}{2} y^2 z + Ky^2$$

soit une primitive de ω .

56.3 Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que la forme différentielle

$$\omega(x, y, z) = (yz + x^2 y^3) dx + (xz + x^3 y^2) dy + f(x, y) dz$$

soit exacte, alors il existe une constante K telle que

$$F(x, y, z) = xyz + \frac{1}{3} x^3 y^3 + Kz$$

soit une primitive de ω .

Pour aller plus loin

57. Questions pour réfléchir

-

58. Forme argument [38]

On considère ici la forme différentielle [19]

$$\omega_0(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

qui est fermée mais pas exacte sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

58.1 Homotopie

- Soit Γ , le support de l'arc paramétré par

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f(t) = (x(t), y(t))$$

où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, de période 2π et qui ne s'annule pas.

Alors l'intégrale de la forme ω_0 le long de Γ est égale à 2π .

2. On retrouve ainsi le résultat du [26] en remarquant que

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{2} dF$$

où $F(x, y) = \ell n(x^2 + y^2)$.

58.2 Primitives locales d'une forme fermée

1.a Si une forme différentielle ω est fermée sur Ω , alors pour toute boule ouverte $B_o(M_0, r)$ contenue dans Ω , il existe une fonction F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $B_o(M_0, r)$ telle que $\omega = dF$.

1.b Pour tout $M \in B_o(M_0, r)$, on note $\Gamma(M)$, le segment d'origine M_0 et d'extrémité M . La fonction F définie par

$$F(M) = \int_{\Gamma(M)} \omega$$

est une primitive de ω .

2. La fonction F_0 définie par

$$F_0(x, y) = 2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{Arg}(x + iy)$$

est une primitive de la forme ω_0 sur l'ouvert

$$\Omega_0 = \mathbb{R}^2 \setminus ([y = 0] \cap [x \leq 0]).$$

3. La fonction F_1 définie par

$$F_1(x, y) = \operatorname{Arctan}(y/x)$$

est une primitive de ω_0 sur l'ouvert $\Omega_1 = \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$.

I

Problèmes différentiels

1. Mise sous forme résoluble

La théorie des équations différentielles ne s'applique qu'aux équations écrites sous forme résoluble :

$$(1) \quad x' = f(t, x)$$

où $f \in \mathcal{C}^0(U, E)$, en notant E , l'espace des phases et U , un ouvert de $\mathbb{R} \times E$.

1.1 Pour l'équation

$$(4 + t^2)x' = 4 + x^2,$$

l'espace des phases est $\mathbb{R}$, l'ouvert U est $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et la fonction f est définie par

$$\forall (t, x) \in U, \quad f(t, x) = \frac{4 + x^2}{4 + t^2}.$$

1.2 Pour l'équation

$$\sqrt{1 - t^2}x' + \sqrt{1 - x^2} = 0,$$

l'espace des phases est $\mathbb{R}$, l'ouvert U est $] -1, 1[\times] -1, 1[$ et

$$\forall (t, x) \in U, \quad f(t, x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

1.3 Équation du pendule

Pour l'équation

$$\theta'' + \sin \theta = 0,$$

l'espace des phases est $\mathbb{R}^2$, l'ouvert U est $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ et

$$\forall (t, x_1, x_2) \in U, \quad f(t, x_1, x_2) = (x_2, -\sin x_1).$$

1.4 Pour l'équation

$$txx'' - 2t(x')^2 - xx' = 0,$$

l'espace des phases est $\mathbb{R}^2$, l'ouvert U est $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ et

$$\forall (t, x_1, x_2) \in U, \quad f(t, x_1, x_2) = \left(x_2, \frac{2x_2^2}{x_1} + \frac{x_2}{t} \right).$$

1.5 Pour le système différentiel

$$\begin{cases} x' = 2x + y^2 \\ y' = -y + x^2 - y^2 \end{cases},$$

l'espace des phases est $\mathbb{R}^2$, l'ouvert U est $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ et

$$\forall (t, x_1, x_2) \in U, \quad f(t, x_1, x_2) = (2x_1 + x_2^2, -x_2 + x_1^2 - x_2^2).$$

1.1 Notions de solution

2. ∇ Une fonction φ est une **solution sur l'intervalle** I de l'équation différentielle (1) lorsque $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, E)$ et que

$$\forall t \in I, \quad (t, \varphi(t)) \in U \quad \text{et} \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

3. Équations linéaires

3.1 ∇ L'équation différentielle (1) est **linéaire** lorsque $U = I_0 \times E$ et que, pour tout $t \in I_0$, l'application $[x \mapsto f(t, x)]$ est une fonction affine de E dans E .

3.2 Si $f : I \times E \rightarrow E$ est continue et si, pour tout $t \in I_0$, l'application $[x \mapsto f(t, x)]$ est une fonction affine, alors il existe une fonction continue $a : I \rightarrow L(E)$ et une fonction continue $b : I \rightarrow E$ telles que

$$\forall (t, x) \in I \times E, \quad f(t, x) = a(t)(x) + b(t).$$

4. Équations autonomes

4.1 ∇ Une **équation différentielle autonome du premier ordre** est une équation de la forme

$$(2) \quad x' = h(x)$$

où h est une fonction continue d'un ouvert $\Omega \subset E$ dans E .

4.2 Si l'équation (1) est autonome, alors $U = \mathbb{R} \times \Omega$ et $f(t, x) = h(x)$ pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$.

4.3 Soit φ , une solution de l'équation autonome (2) sur l'intervalle I . Quel que soit $T \in \mathbb{R}$, la translatée $[t \mapsto \varphi(t + T)]$ est une solution de (2).

4.4 Lorsque l'espace des phases E est un plan, une équation différentielle autonome s'écrit en général sous la forme d'un système différentiel :

$$(3) \quad \begin{cases} x' = g_1(x, y) \\ y' = g_2(x, y) \end{cases}$$

où g_1 et g_2 sont continues d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Le système (3) peut être mis sous la forme (2) en posant

$$h(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y)).$$

4.5 Équation autonome du second ordre

Une équation différentielle scalaire autonome du second ordre

$$x'' = F(x, x')$$

peut être mise sous la forme (3) :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = F(x, y) \end{cases}$$

et sous la forme (2) en posant $h(x, y) = (y, F(x, y))$.

1.2 Conditions supplémentaires

5. Problèmes de Cauchy

5.1 ∇ On appelle **condition initiale** pour l'équation différentielle (1) tout couple $(t_0, x_0) \in U$.

5.2 ∇ Le **problème de Cauchy** associé à l'équation différentielle (1) et à la condition initiale $(t_0, x_0) \in U$ consiste à trouver les fonctions φ telles que

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \\ \varphi(t_0) = x_0. \end{cases}$$

5.3 Si φ est une solution du problème de Cauchy (4), alors $\varphi(t_0) = x_0$ et $\varphi'(t_0) = f(t_0, x_0)$.

6. Formulation intégrale d'un problème de Cauchy

La fonction φ est une solution sur I du problème de Cauchy associé à la condition initiale $(t_0, x_0) \in U$ si, et seulement si, elle est continue sur I et

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) \, ds$$

pour tout $t \in I$.

7. Prolongement d'une solution

Soit φ , une solution de (1) sur un intervalle borné

$$I =]\alpha, \beta[.$$

On suppose que φ tend vers $\ell_- \in E$ au voisinage de α et vers $\ell_+ \in E$ au voisinage de β .

Si $(\alpha, \ell_-) \in U$ et $(\beta, \ell_+) \in U$, alors le prolongement défini par $\varphi(\alpha) = \ell_-$ et par $\varphi(\beta) = \ell_+$ est une solution de (1) sur $[\alpha, \beta]$.

8. Exemples de problèmes aux limites

On parle de **problèmes aux limites** (*Boundary Value Problems*), par opposition aux problèmes de Cauchy (*Initial Value Problems*), lorsqu'on cherche les solutions de l'équation différentielle (1) qui sont définies sur un intervalle donné I et qui vérifient en outre des conditions imposées aux extrémités de cet intervalle.

8.1 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $T > 0$. Exprimer les solutions de l'équation

$$z'' + z = 0$$

telles que $z(0) = a$ et $z(T) = b$.

8.2 Toutes les solutions sur $I =]0, +\infty[$ de l'équation

$$z' + z = \ln t$$

restent bornées au voisinage de 0; aucune n'est bornée au voisinage de $+\infty$.

Entraînement**9. Questions pour réfléchir**

1. Si $f : U \rightarrow E$ est de classe $\mathcal{C}^p$ (resp. de classe $\mathcal{C}^\infty$), alors toute solution de l'équation (1) est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ (resp. de classe $\mathcal{C}^\infty$).

2. Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ et si $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ est une solution sur I de l'équation (1), alors

$$\forall t \in I, \quad \varphi''(t) = df(t, \varphi(t))(1, \varphi'(t)).$$

Exprimer $\varphi''(t)$ en fonction des dérivées partielles de f et des composantes $x_1, \dots, x_n$ de φ . Que devient $\varphi''(t)$ lorsque $n = 1$?

3. Si l'équation (1) est linéaire, alors l'ensemble de ses solutions sur I est une partie convexe de $\mathcal{C}^1(I, E)$.

4. Suite de [4.3] – Quel est l'intervalle de définition de la solution $[t \mapsto \varphi(t+T)]$?

5. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(U, E)$, alors le problème de Cauchy (4) admet au plus une solution développable en série entière au voisinage de t_0 .

II**Théorie de Cauchy-Lipschitz**

10. On étudie les solutions du problème de Cauchy

$$(5) \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t) = f(t, x(t)) \end{cases}$$

où f est une fonction continue d'un ouvert U de $\mathbb{R} \times E$ dans E et $(t_0, x_0) \in U$.

II.1 Solutions locales

11. Une **solution locale** du problème de Cauchy (5) est un couple (I, φ) , où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ qui est un voisinage de t_0 et $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, E)$ est une solution sur I du problème de Cauchy associé à la condition initiale (t_0, x_0) .

Théorème de Cauchy-Lipschitz local (admis)

12. → On suppose que $f : U \rightarrow E$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, quelle que soit la condition initiale $(t_0, x_0) \in U$, il existe un intervalle $I \in \mathcal{V}(t_0)$ tel que le problème de Cauchy associé à (t_0, x_0) admette une, et une seule, solution sur I .

Prolongements d'une solution

13. On suppose ici que les hypothèses du théorème [12] sont vérifiées.

13.1 → On suppose que $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, que $I =]\alpha, \beta[$ et qu'il existe une solution $\varphi_0 \in \mathcal{C}^1(I, E)$ de l'équation (1) tendant vers $\ell \in E$ au voisinage de β .

Si $(\beta, \ell) \in U$, alors il existe $r > 0$ et un prolongement φ_1 de φ_0 qui est solution de (1) sur $]\alpha, \beta + r[$.

Unicité globale

14. On suppose que les hypothèses du théorème [12] sont vérifiées et on considère deux solutions locales (I, φ) et (J, ψ) du problème de Cauchy (5).

14.1 → Soient $f \in \mathcal{C}^1(U, E)$ et $(t_0, x_0) \in U$. Si (I, φ) et (J, ψ) sont deux solutions locales du problème de Cauchy (5), alors φ et ψ sont égales sur $I \cap J$.

II.2 Solutions maximales

15. Une solution (d'une équation différentielle ou d'un problème de Cauchy) est **maximale** lorsqu'elle n'est la restriction d'aucune autre solution.

16. → Soient $f \in \mathcal{C}^1(U, E)$ et $(t_0, x_0) \in U$. Il existe une, et une seule, solution maximale du problème de Cauchy (5) associé à la condition initiale (t_0, x_0) .

Trajectoires

17. Les **trajectoires** de l'équation $x' = f(t, x)$ sont les graphes (dans $\mathbb{R} \times E$) des solutions maximales de cette équation.

Comportement asymptotique des solutions maximales

18. Une solution maximale (I, φ) de (1) est définie tant que son graphe

$$\Gamma = \{(t, \varphi(t)), t \in I\}$$

est contenu dans l'ouvert U .

19. → Si φ est une solution maximale de (1) définie sur un intervalle $]\alpha, \beta[$ avec $\beta < +\infty$, alors sa trajectoire sort de tout compact $K \subset U$:

$$\forall K \subset U, \forall t \in]\alpha, \beta[, \exists u \geq t, \quad (u, \varphi(u)) \in U \setminus K.$$

III**Équations autonomes**

20. On se restreint maintenant aux équations différentielles de la forme (2) où h est une fonction continue d'un ouvert $\Omega \subset E$ dans E . Le problème de Cauchy associé à une condition initiale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$ est alors le suivant.

$$(6) \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ x'(t) = h(x(t)) \end{cases}$$

Dans l'étude théorique des équations autonomes, on supposera toujours que la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\Omega \subset E$, de telle sorte que la conclusion du théorème de Cauchy-Lipschitz global (théorème [16]) soit vraie.

Invariance par translation

Courbes intégrales et orbites

21. Pour les équations différentielles autonomes, la notion de **courbe intégrale** dans l'espace des phases E est préférable à la notion de trajectoire dans $\mathbb{R} \times E$.

21.1 $\nRightarrow$ Les **courbes intégrales** de l'équation différentielle autonome (2) sont les supports dans E des solutions maximales (I, φ) , considérées comme des arcs paramétrés.

21.2 Une équation différentielle autonome (2) peut être considérée comme un **champ de vecteurs** sur l'ouvert Ω et dans ce cas, les **courbes intégrales** de l'équation différentielle sont les **lignes de champ**.

22. $\nRightarrow$ L'**orbite** de $x \in \Omega$ est le support de la solution maximale (I_x, φ_x) du problème de Cauchy (6) associé à $(t_0, x_0) = (0, x)$.

III.1 Étude locale

On suppose toujours que les hypothèses du théorème [16] sont vérifiées.

Au voisinage d'un point régulier

23. $\nRightarrow$ Un point $x_0 \in \Omega$ est un **point régulier** pour l'équation autonome (2) lorsque $h(x_0) \neq 0_E$.

24. Redressement du flot

Pour tout $x \in \Omega$, on note (I_x, φ_x) , la solution maximale du problème de Cauchy associé à la condition initiale $(0, x)$. On pose alors

$$\Phi(t, x) = \varphi_x(t)$$

pour tout couple (t, x) tel que $x \in \Omega$ et $t \in I_x$.

1. Pour tous s, t et x tels que les expressions suivantes aient un sens,

$$\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x).$$

2. Pour tout $x \in \Omega$,

$$\Phi(0, x) = x \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, x) = h(x).$$

3. Il existe $\alpha > 0$ et $r > 0$ tel que

$$\forall x \in B_0(x_0, r), \quad]-\alpha, \alpha[\subset I_x.$$

4. Si x_0 est un point régulier, alors il existe un difféomorphisme Ψ d'un voisinage V de x_0 sur un voisinage W de x_0 tel que

$$\forall x \in B_0(x_0, r), \quad \forall t \in]-\alpha, \alpha[, \quad \Psi(\varphi_x(t)) = x + t \cdot h(x_0).$$

Que dire de l'allure des courbes intégrales au voisinage d'un point régulier x_0 ?

Points stationnaires

25. $\nRightarrow$ Le point $x_0 \in \Omega$ est un **point stationnaire** pour l'équation différentielle autonome $x' = h(x)$ lorsque $h(x_0) = 0$.

26. Équilibre dans un champ de potentiel

1. Si le champ de vecteurs h dérive d'un potentiel U :

$$\forall x \in \Omega, \quad h(x) = -\nabla U(x),$$

alors l'expression $U(\varphi(t))$ est décroissante, quelle que soit la solution (I, φ) de l'équation (2).

2. Si le potentiel U atteint un minimum (resp. un maximum) en $x_0 \in \Omega$, on dit que x_0 est un **point d'équilibre stable** (resp. **instable**) : commenter.

Linéarisation au voisinage d'un point stationnaire

27. Comme la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω , si x_0 est un point stationnaire, alors

$$h(x_0 + u) = dh(x_0)(u) + o(u)$$

pour tout vecteur $u \in E$ proche de 0_E . Il est donc naturel de comparer les courbes intégrales de l'équation autonome (2) au voisinage du point x_0 avec les courbes intégrales de l'équation autonome linéaire

$$(7) \quad x'(t) = dh(x_0)(x(t))$$

qui est une équation *linéaire* à coefficients constants.

La comparaison des courbes intégrales de (2) et de (7) est un problème théorique délicat.

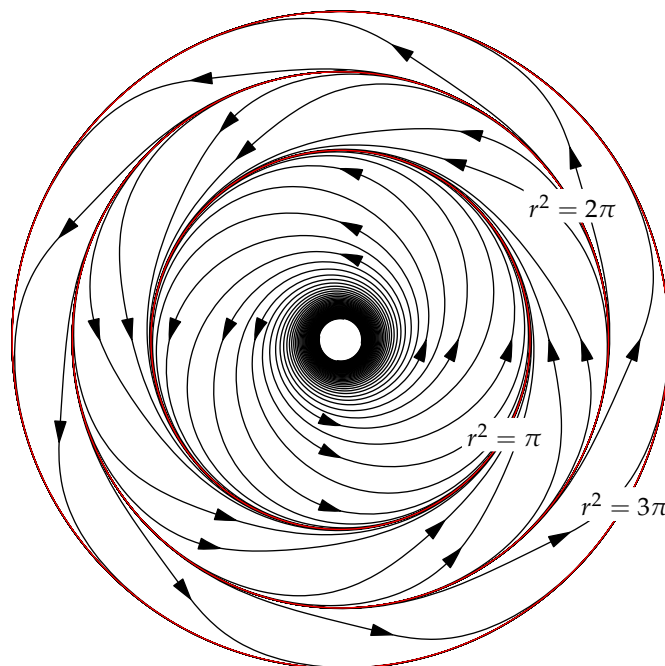
III.2 Étude globale

Solutions périodiques

28. $\rightarrow$ Si (I, φ) est une solution maximale de l'équation autonome (2) et s'il existe $T > 0$ et $t_0 \in I$ tels que

$$t_0 + T \in I \quad \text{et} \quad \varphi(t_0) = \varphi(t_0 + T),$$

alors $I = \mathbb{R}$ et la fonction φ est périodique, de période T .

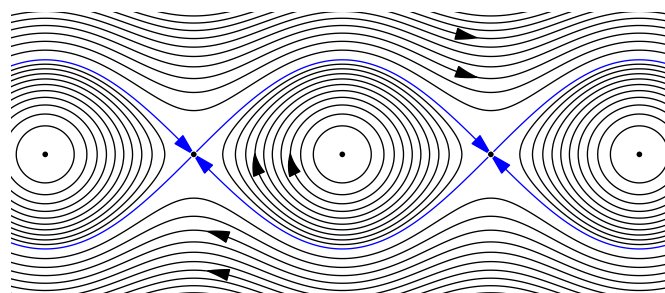


29. Équation du pendule

Étudier les lignes de niveau de

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x.$$

En déduire quelles sont les courbes intégrales fermées et celles qui sont bornées. Interprétation physique.

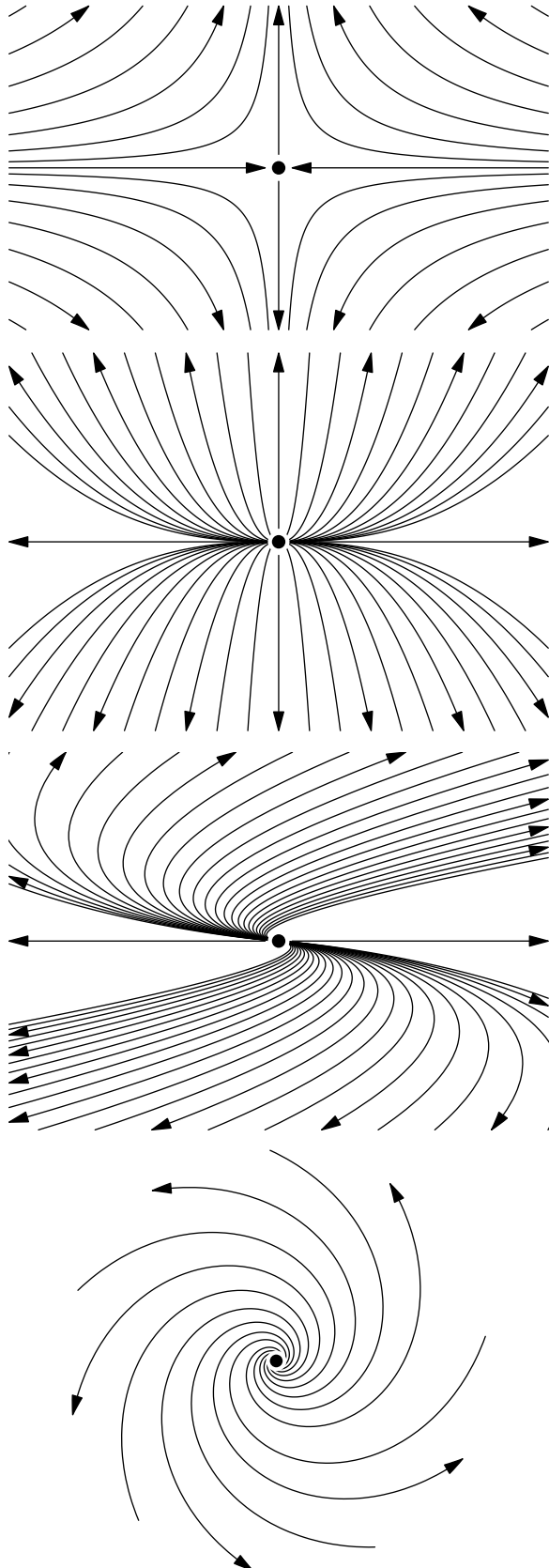


Comportement asymptotique

30. On suppose que $h \in \mathcal{C}^1(\Omega, E)$ pour que les hypothèses du théorème [16] soient vérifiées sur l'ouvert Ω . Soit $(\alpha, \beta[, \varphi)$, une solution maximale de (2).

30.1 → Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\alpha, \beta[, E)$, une solution maximale de l'équation (2) qui tend vers $\ell \in \Omega$ au voisinage de β . Alors $\beta = +\infty$ et ℓ est un point stationnaire.

Systèmes linéaires autonomes du plan



III.3 Techniques de calcul

Séparation des variables (en dimension 1)

31. On considère une fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ dans $E = \mathbb{R}$ et $x_0 \in \Omega$. On peut donc appliquer le théorème [16].

32. On suppose que $h(x_0) \neq 0$ et on note (I, φ) , la solution maximale du problème de Cauchy associé à la condition initiale $(0, x_0)$.

Intégrales premières

33. ✎ Une application $H \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$ est une **intégrale première** de l'équation différentielle autonome (2) lorsque, pour toute solution (I, φ) de cette équation, l'expression $H(\varphi(t))$ est constante.

34. **Intégrales premières et formes différentielles**

1. Si la forme différentielle

$$\omega = -g(x, y) dx + f(x, y) dy$$

est exacte, alors une primitive de ω est une intégrale première du système autonome

$$(8) \quad \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

2. Toute équation différentielle de la forme

$$x'' + \theta(x) = 0$$

admet une intégrale première : laquelle ? Expliquer la notion de **système conservatif**.

3. Si la forme différentielle ω admet un **facteur intégrant** K , alors toute primitive de la forme exacte

$$\omega_0 = -K(x, y)g(x, y) dx + K(x, y)f(x, y) dy$$

est une intégrale première du système autonome (8). Étudier la réciproque.

On compare différents modes de représentation des courbes (dans le plan et dans l'espace) et des surfaces.

Représentations de droites et de plans

1. Une droite du plan peut être représentée

— par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur (*représentation paramétrique*) :

$$A + \mathbb{R} \cdot u,$$

— par la donnée d'une équation cartésienne (*représentation cartésienne*) :

$$ax + by + c = 0,$$

— ou par une expression affine (*graphe d'une fonction affine*) :

$$y = mx + p.$$

2. **Question ouverte**

Comment passer d'une représentation à une autre ?

3. **Question ouverte**

Quelles sont les trois manières de représenter un plan de $\mathbb{R}^3$? Comment passer d'une représentation à une autre ?

4. **Question ouverte**

Quelles sont les trois manières de représenter une droite de $\mathbb{R}^3$? Comment passer d'une représentation à une autre ?

I

Courbes planes

5. Il y a deux manières de définir une courbe plane :

— *explicitement* au moyen d'un paramétrage

$$(x(t), y(t)) \quad t \in I$$

— ou *implicitement* par une équation cartésienne.

$$F(x, y) = 0$$

6. Le graphe d'une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ peut être représenté aussi bien sous forme paramétrique :

$$f(t) = (t, \varphi(t)) \quad t \in I$$

que sous forme implicite :

$$F(x, y) = y - \varphi(x) = 0.$$

7. **Question ouverte**

Le cercle unité est représenté implicitement par l'équation cartésienne $[x^2 + y^2 - 1 = 0]$ et explicitement par le paramétrage $f(t) = (\cos t, \sin t)$ pour $t \in]-\pi, \pi]$. Est-il le graphe d'une fonction ? Est-il l'union des graphes de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$? Il est l'union des graphes de quatre fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

I.1 Représentation paramétrique

8. On suppose que la courbe Γ est le support de l'arc (I, f) , où $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

8.1 $\nRightarrow$ La point $M_0 = f(t_0)$ est un **point régulier** de Γ lorsque $f'(t_0) \neq 0$.

8.2 $\nRightarrow$ La **tangente** à la courbe Γ en un point régulier $M_0 = f(t_0)$ est la droite

$$T_{M_0}\Gamma = M_0 + \mathbb{R} \cdot f'(t_0).$$

8.3 $\nRightarrow$ La **normale** à Γ en un point régulier M_0 est la perpendiculaire à $T_{M_0}\Gamma$ issue de M_0 .

9. **Propriété à vérifier**

Si $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, tous les points de l'arc paramétré

$$f(t) = (t, \varphi(t))$$

sont réguliers. Les droites tangentes au support de (I, f) sont aussi les tangentes au graphe de φ .

I.2 Représentation cartésienne

10. On suppose que la courbe Γ est représentée par une équation cartésienne :

$$\Gamma = [F(x, y) = 0]$$

où F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

11. **Question de synthèse**

Représentation cartésienne des coniques de $\mathbb{R}^2$.

12. **Propriété à vérifier**

La lemniscate, définie par $\rho^2 = \cos 2\theta$, est représentée par $(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$.

13. **Propriété à vérifier**

La cissoïde, définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{t^3}{1+t^2},$$

est représentée par $y^2(1-x) - x^3 = 0$.

14. **Propriété à vérifier**

La cardioïde, définie par $\rho = 1 + \cos \theta$, est représentée par

$$(x^2 + y^2 - x)^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

15. **Propriété à vérifier**

Le support de l'arc paramétré par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$

est contenu dans le cercle unité $[x^2 + y^2 - 1 = 0]$. Y a-t-il égalité ?

Tangente en un point régulier

16. $\nRightarrow$ Le point $M_0 = (x_0, y_0)$ de Γ est un **point régulier** lorsque l'application linéaire tangente $dF(M_0)$ n'est pas la forme linéaire nulle.

17. **Propriété à vérifier**

Le point M_0 est régulier si, et seulement si, la forme linéaire $dF(M_0)$ est surjective.

18. **Propriété à vérifier**

Le point M_0 est régulier si, et seulement si, le vecteur $\nabla F(M_0)$ n'est pas nul.

19. ∇ La **tangente** à Γ au point M_0 est la droite

$$M_0 + \text{Ker}[dF(M_0)].$$

20. **Propriété à vérifier**

La normale à Γ au point M_0 est dirigée par $\nabla F(M_0)$.

21. **Question ouverte**

La tangente à Γ au point M_0 est représentée par

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)[x - x_0] + \frac{\partial F}{\partial y}(M_0)[y - y_0] = 0.$$

Comparer avec le développement limité à l'ordre 1 de F au voisinage de M_0 .

22. **Question ouverte**

Si $F(x, y) = y - \varphi(x)$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, tous les points de la courbe définie par l'équation $[F(x, y) = 0]$ sont réguliers. Comparer les tangentes à cette courbe avec les tangentes au graphe de φ .

1.3 Équivalence locale des représentations

23. Sous quelles conditions peut-on passer d'une représentation à une autre ?

On commence par étudier le cas d'une courbe représentée paramétriquement avant d'étudier le cas d'une courbe représentée par une équation cartésienne.

Représentation intrinsèque

24. On suppose que la courbe Γ est le support d'un arc (I, f) et que $M_0 = f(t_0)$ est un point régulier de cet arc.

25. **Question ouverte**

Si $x'(t_0) \neq 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\theta = [h \mapsto x(t_0 + h)]$$

réalise un difféomorphisme de $] -\alpha, \alpha[$ sur un intervalle J et une fonction $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[, \quad y(t) = \varphi(x(t)).$$

Que vaut $\varphi'(x(t_0))$?

Théorème des fonctions implicites (admis)

26. **Question ouverte**

Soit M_0 , un point régulier de la courbe Γ définie par $F(x, y) = 0$. Alors

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(M_0) \neq 0.$$

Que dire de la direction de la tangente à Γ au point M_0 dans chacun de ces deux cas ?

27. $\rightarrow$ Soient $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $M_0 \in \Omega$, un point tel que

$$F(M_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(M_0) \neq 0.$$

Il existe deux réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ et une fonction

$$g \in \mathcal{C}^1([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], \mathbb{R})$$

tels que

$$F(x, y) = 0 \iff y = g(x)$$

pour tout $(x, y) \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\times]y_0 - \beta, y_0 + \beta[$.

NB : Faire une figure pour illustrer le théorème.

28. **Propriété à vérifier**

$$g(x_0) = y_0$$

29. **Propriété à vérifier**

$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \quad F(x, g(x)) = 0.$$

30. **Question ouverte**

Que vaut $g'(x_0)$? Quelle est la tangente au graphe de g au point M_0 ?

31. $\rightarrow$ Soient $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$; $M_0 \in \Omega$, un point tel que

$$F(M_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(M_0) \neq 0.$$

Il existe deux réels $\gamma > 0$ et $\delta > 0$ et une fonction

$$h \in \mathcal{C}^1([y_0 - \delta, y_0 + \delta], \mathbb{R})$$

tels que

$$F(x, y) = 0 \iff x = h(y)$$

pour tout $(x, y) \in]x_0 - \gamma, x_0 + \gamma[\times]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$.

NB : Faire une figure pour illustrer le théorème.

32. **Question ouverte**

Que vaut $h'(y_0)$? Quelle est la tangente au graphe de h au point M_0 ?

33. **Question ouverte**

On suppose que M_0 est un point de Γ tel que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(M_0) \neq 0.$$

Comparer les fonctions g et h données par les deux versions du théorème des fonctions implicites.

Réponse : Sur un voisinage convenable de M_0 , ce sont des bijections réciproque l'une de l'autre.

NB : Faire une figure !

34. **Question ouverte**

En quels points du cercle unité $[x^2 + y^2 = 1]$ peut-on appliquer les deux formes du théorème des fonctions implicites ?

II

Surfaces

II.1 Graphe d'une fonction

35. Les surfaces rencontrées jusqu'ici, outre les surfaces simples (plans, quadriques), sont les graphes des fonctions $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

36. **Propriété à vérifier**

Si (x_0, y_0, z_0) appartient au graphe d'une fonction $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, alors $z_0 = g(x_0, y_0)$.

37. ∇ Si $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et si $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ est un point du graphe Σ de g , alors le **plan tangent** à Σ au point M_0 est le plan

$$z = z_0 + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

38. **Question ouverte**

Si f est une application affine d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, alors $f(u) = \mathcal{O}(1)$ lorsque u est voisin de 0_E . Condition pour que $f(u) = o(1)$ au voisinage de 0_E ? pour que $f(u) = o(u)$?

39. **Question ouverte**

Comparer l'équation du plan tangent et le développement limité à l'ordre un de g au voisinage de (x_0, y_0) .

Position par rapport au plan tangent

40. On suppose que g est de classe $\mathcal{C}^2$ et on utilise les notations de Monge :

$$r = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0, y_0) \quad s = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad t = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

pour alléger l'écriture de la matrice hessienne :

$$H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

41. Propriété à vérifier

Si la matrice hessienne H est définie positive (resp. définie négative), alors la surface Σ est localement située au-dessus (resp. au-dessous) de son plan tangent $T_{M_0}\Sigma$.

42. Propriété à vérifier

Si $rt - s^2 < 0$, alors la surface Σ traverse son plan tangent $T_{M_0}\Sigma$.

II.2 Représentation paramétrique

43. $\Leftarrow$ Une **nappe paramétrée** est le support d'une application f de classe $\mathcal{C}^1$ de U , ouvert de $\mathbb{R}^2$, dans $\mathbb{R}^3$.

$$\forall (s, t) \in U, \quad f(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$$

44. Question ouverte

Nature géométrique de la nappe paramétrée par

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(s, t) = A + s \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v}$$

et rang de $df(s, t)$ en fonction de $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

Plan tangent en un point régulier

45. $\Leftarrow$ Le point $M_0 = f(s_0, t_0)$ est un **point régulier** de la nappe Σ paramétrée par (U, f) lorsque l'application linéaire tangente

$$df(s_0, t_0) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$$

est injective.

46. $\Leftarrow$ Si $M_0 = f(s_0, t_0)$ est un point régulier de la nappe Σ , alors le **plan tangent** à Σ au point M_0 est défini par

$$T_{M_0}\Sigma = M_0 + \text{Im}[df(s_0, t_0)].$$

47. Propriété à vérifier

Le point $M_0 = f(s_0, t_0)$ est un point régulier si, et seulement si, les vecteurs

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s_0, t_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t}(s_0, t_0)$$

ne sont pas proportionnels et dans ce cas,

$$T_{M_0}\Sigma = M_0 + \text{Vect}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial f}{\partial t}(s_0, t_0)\right).$$

48. Propriété à vérifier

Le point $M_0 = f(s_0, t_0)$ est un point régulier si, et seulement si, le vecteur

$$\mathbf{n}(s_0, t_0) = \frac{\partial f}{\partial s}(s_0, t_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial t}(s_0, t_0)$$

n'est pas nul et, dans ce cas, le vecteur $\mathbf{n}(s_0, t_0)$ dirige la normale à Σ au point M_0 .

49. Question ouverte

Représentation cartésienne du plan tangent $T_{M_0}\Sigma$.

50. Question ouverte

Comparer le plan tangent à Σ et le développement limité à l'ordre un au voisinage de (s_0, t_0) de la fonction f .

Exemple : Graphe d'une fonction

51. Le graphe Σ d'une fonction g de $U \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est une surface paramétrée par

$$f(u, v) = (u, v, g(u, v)), \quad (u, v) \in U.$$

52. Propriété à vérifier

Tous les points de Σ sont réguliers et le plan tangent à Σ au point $M_0 = (x_0, y_0, z_0) = f(u_0, v_0)$ admet

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0)(y - y_0) = z - z_0$$

pour équation cartésienne.

Exemple : la sphère unité

53. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(s, t) = (\cos s \cos t, \sin s \cos t, \sin t).$$

54. Propriété à vérifier

Le point $M_0 = f(s, t)$ est régulier si, et seulement si,

$$t \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

et dans ce cas, le plan tangent $T_{M_0}\Sigma$ est orthogonal à OM_0 .

Exemple : Cônes

55. $\Leftarrow$ On considère une courbe Γ , contenue dans un plan P , et un point A situé hors du plan P . Le **cône** $\mathcal{C}$ de **sommet** A et de **base** Γ est l'ensemble des droites issues de A et passant par Γ , appelées **directrices** de $\mathcal{C}$.

On dit aussi que le cône $\mathcal{C}$ **s'appuie** sur la courbe Γ .

NB : Faire une figure !

56. Propriété à vérifier

Étant donné un paramétrage $(M(t), t \in I)$ de la courbe plane Γ , l'application $f : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R} \times I, \quad f(s, t) = A + s \cdot AM(t)$$

est un paramétrage du cône $\mathcal{C}$.

57. Propriété à vérifier

Le sommet A est un point singulier du cône $\mathcal{C}$.

58. Question ouverte

Exemple de cône admettant des points singuliers autres que le sommet ?

59. Propriété à vérifier

Si (I, M) est un paramétrage régulier de Γ , alors le sommet A est l'unique point singulier du cône $\mathcal{C}$.

60. Propriété à vérifier

Si M_0 est un point régulier du cône $\mathcal{C}$, la directrice

$$A + \mathbb{R} \cdot AM_0$$

est contenue dans le plan tangent à $\mathcal{C}$ au point M_0 .

Exemple : Cylindres

61. $\Leftarrow$ On considère un plan P , une courbe $\Gamma \subset P$ et un vecteur $\mathbf{u}$ n'appartenant pas à la direction de P . Le **cylindre** $\mathcal{C}$ de **base** Γ et de **direction** $\mathbb{R} \cdot \mathbf{u}$ est l'ensemble des droites affines $(M + \mathbb{R} \cdot \mathbf{u})$, le point M parcourant la courbe Γ , appelées **directrices** de $\mathcal{C}$.

62. Propriété à vérifier

Si (I, M) est un paramétrage régulier de Γ , alors l'application $f : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R} \times I, \quad f(s, t) = M(t) + s \cdot u$$

est un paramétrage du cylindre $\mathcal{C}$ dont tous les points sont réguliers.

63. Question ouverte

Exemple de cylindre admettant des points singuliers ?

64. Propriété à vérifier

Pour tout point $M_0 \in \mathcal{C}$, la directrice $M_0 + \mathbb{R} \cdot u$ est contenue dans le plan tangent en M_0 au cylindre $\mathcal{C}$.

65. Question de synthèse

Soit $\mathcal{C}$, un cylindre de direction $\mathbb{R} \cdot u$, représenté par l'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$, où $F \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Pour tout point $M_0 \in \mathcal{C}$, le gradient $\nabla F(M_0)$ est orthogonal au vecteur u .

II.3 Représentation cartésienne

66. On suppose que la surface Σ est représentée par une équation cartésienne :

$$\Sigma = [F(x, y, z) = 0]$$

où F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. De ce point de vue, les surfaces les plus simples sont les plans affines (la fonction F est une forme affine) et les quadriques (la fonction F est une fonction polynomiale de degré deux).

Plan tangent en un point régulier

67. ∇ Un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ est un **point régulier** de Σ lorsque la forme linéaire $dF(M_0)$ est surjective.

68. Propriété à vérifier

Le point M_0 est un point régulier de Σ si, et seulement si, $F(M_0) = 0$ et $\nabla F(M_0) \neq 0$.

69. ∇ Le **plan tangent** à Σ au point régulier M_0 est le plan

$$M_0 + \text{Ker}[dF(M_0)].$$

70. Propriété à vérifier

Le plan tangent à Σ au point régulier M_0 est représenté par l'équation cartésienne suivante.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(M_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(M_0)(z - z_0) = 0$$

71. Propriété à vérifier

La normale à Σ au point régulier M_0 est la droite issue de M_0 et dirigée par le vecteur $\nabla F(M_0)$.

72. Question ouverte

Si F est une forme affine non constante, alors Σ est un plan affine, tous les points sont réguliers et, en tout point $M_0 \in \Sigma$, le plan tangent à Σ est confondu avec Σ .

Exemple : Graphe d'une fonction

73. On suppose que la surface Σ est le graphe d'une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$: elle est donc représentée implicitement par l'équation suivante.

$$F(x, y, z) = \varphi(x, y) - z = 0$$

74. Propriété à vérifier

Tous les points de Σ sont réguliers et le plan tangent à Σ au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est représenté par

$$z = z_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Théorème des fonctions implicites

75. Le théorème des fonctions implicites montre que, au voisinage d'un point régulier, une surface définie implicitement par

$$[F(x, y, z) = 0]$$

peut aussi être vue comme le graphe d'une fonction.

76. $\rightarrow$ Soit Ω , un ouvert de $\mathbb{R}^3$; $F \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$ et $M_0(x_0, y_0, z_0)$, un point de Ω tel que $F(M_0) = 0$. Si

$$\frac{\partial F}{\partial z}(M_0) \neq 0,$$

alors il existe un réel $\gamma > 0$, un voisinage W de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$ et une application $\varphi \in \mathcal{C}^k(W, \mathbb{R})$ tels que

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ (x, y) \in W \\ z \in]z_0 - \gamma, z_0 + \gamma[\end{cases} \iff z = \varphi(x, y).$$

77. Question ouverte

Énoncer le théorème analogue au théorème II.3 en supposant que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0) \neq 0 \quad \text{ou que} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(M_0) \neq 0.$$

77.1 Réponse 1 :

Si $\frac{\partial F}{\partial x}(M_0) \neq 0$, alors il existe un réel $\alpha > 0$, un voisinage U de (y_0, z_0) dans $\mathbb{R}^2$ et une application $\chi \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ tels que

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ (y, z) \in U \\ x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\end{cases} \iff x = \chi(y, z).$$

77.2 Réponse 2 :

Si $\frac{\partial F}{\partial y}(M_0) \neq 0$ alors il existe un réel $\beta > 0$, un voisinage V de (x_0, z_0) dans $\mathbb{R}^2$ et une application $\psi \in \mathcal{C}^k(V, \mathbb{R})$ tels que

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ (x, z) \in V \\ y \in]y_0 - \gamma, y_0 + \gamma[\end{cases} \iff y = \psi(x, z).$$

78. Propriété à vérifier

D'après le théorème des fonctions implicites,

$$\forall (x, y) \in W, \quad F(x, y, \varphi(x, y)) = 0.$$

En particulier, $\varphi(x_0, y_0) = z_0$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{\partial F}{\partial z}(M_0) = 0$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial y}(M_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{\partial F}{\partial z}(M_0) = 0.$$

79. Question ouverte

Comparer le plan tangent au graphe de φ au point M_0 et le plan tangent à Σ au même point.

II.4 Surfaces de révolution

80. ∇ Une surface Σ est une **surface de révolution autour de l'axe** $A + \mathbb{R} \cdot u$ lorsqu'elle est représentée dans un repère orthonormé (A, i, j, u) par une équation de la forme

$$[g(x^2 + y^2, z) = 0].$$

81. Propriété à vérifier

Si une surface Σ est représentée par $[g(x^2 + y^2, z) = 0]$, alors les plans normaux à l'axe de révolution sont les plans horizontaux $[z = z_0]$ et les plans qui contiennent l'axe de révolution sont les plans verticaux $[ax + by = 0]$.

82. ∇ Les **parallèles** d'une surface de révolution Σ sont les courbes obtenues par intersection de Σ avec les plans normaux à l'axe de révolution.

83. ∇ Les **méridiens** d'une surface de révolution Σ sont les courbes obtenues par intersection de Σ avec les plans qui contiennent l'axe de révolution.

84. Question de synthèse

Dresser la liste des quadriques de révolution.

III**Courbes gauches**

85. ∇ Une **courbe gauche** est une courbe de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas contenue dans un plan.

III.1 Représentations paramétriques

86. Une courbe gauche Γ peut être définie comme le support d'un arc paramétré (I, f) où

$$\forall t \in I, \quad f(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

87. ∇ Un point $M_0 = f(t_0)$ de Γ est un **point régulier** de l'arc (I, f) lorsque $f'(t_0) \neq 0$.

88. ∇ Si $M_0 = f(t_0)$ est un point régulier, la **tangente** au support de l'arc (I, f) au point M_0 est la droite affine $M_0 + \mathbb{R} \cdot f'(t_0)$.

89. Propriété à vérifier

Le graphe de $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ est une courbe gauche paramétrée par

$$\forall t \in I, \quad f(t) = (t, \varphi(t)) \in \mathbb{R}^3.$$

Tous les points de cet arc paramétré sont réguliers et la tangente au graphe de φ en M_0 est la tangente au support de (I, f) en M_0 .

Courbes tracées sur une surface

90. Soient (I, f) , un arc paramétré et $\Sigma = [F(x, y, z) = 0]$.

91. Propriété à vérifier

Si le support Γ de l'arc (I, f) est contenu dans Σ , alors le vecteur $f'(t)$ appartient à la direction du plan tangent $T_{f(t)}\Sigma$ pour tout $t \in I$.

92. Propriété à vérifier

S'il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) \in \Sigma$ et si

$$\forall t \in I, \quad f'(t) \perp \nabla F(f(t)),$$

alors $\Gamma \subset \Sigma$.

93. Propriété à vérifier

Si une droite $\mathcal{D}$ est contenue dans la surface Σ , alors la droite $\mathcal{D}$ est contenue dans le plan tangent $T_{M_0}\Sigma$ en tout point régulier $M_0 \in \mathcal{D} \cap \Sigma$.

III.2 Représentations implicites

94. Une droite de l'espace $\mathbb{R}^3$ peut être considérée comme l'intersection de deux plans non parallèles. Nous allons étudier une représentation analogue des courbes gauches.

Surfaces transverses

95. ∇ Soit M_0 , un point commun aux deux surfaces Σ_1 et Σ_2 . Les surfaces Σ_1 et Σ_2 sont **transverses** en M_0 lorsque leurs plans tangents $T_{M_0}\Sigma_1$ et $T_{M_0}\Sigma_2$ ne sont pas parallèles.

96. Propriété à vérifier

Les surfaces Σ_1 et Σ_2 sont transverses en M_0 si, et seulement si, $T_{M_0}\Sigma_1 \cap T_{M_0}\Sigma_2$ est une droite affine.

97. Propriété à vérifier

Si $\Sigma_1 = [F_1(x, y, z) = 0]$ et $\Sigma_2 = [F_2(x, y, z) = 0]$ et si M_0 est un point régulier commun à Σ_1 et Σ_2 , alors les deux surfaces sont transverses en M_0 si, et seulement si, les gradients $\nabla F_1(M_0)$ et $\nabla F_2(M_0)$ ne sont pas colinéaires.

Tangente en un point régulier

98. Soient U , un ouvert de $\mathbb{R}^3$; F_1 et F_2 , deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ et $F \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^2)$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in U, \quad F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z)).$$

La courbe gauche définie par

$$\Gamma = [F(x, y, z) = 0]$$

apparaît comme l'intersection des deux surfaces

$$\Sigma_1 = [F_1(x, y, z) = 0] \quad \text{et} \quad \Sigma_2 = [F_2(x, y, z) = 0].$$

99. ∇ Soit $F \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^2)$. Le point M_0 de la courbe gauche $\Gamma = [F(x, y, z) = 0]$ est un **point régulier** lorsque l'application linéaire

$$dF(M_0) \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$$

est surjective.

100. Propriété à vérifier

L'application linéaire $dF(M_0)$ est surjective si, et seulement si, son noyau est une droite vectorielle.

101. Propriété à vérifier

Le point M_0 est un point régulier de Γ si, et seulement si, les deux surfaces Σ_1 et Σ_2 sont transverses en M_0 .

102. Propriété à vérifier

Le point M_0 est un point régulier de Γ si, et seulement si, le vecteur $[\nabla F_1(M_0)] \wedge [\nabla F_2(M_0)]$ n'est pas nul.

103. Propriété à vérifier

$$\text{Ker}[dF(M_0)] = \text{Ker}[dF_1(M_0)] \cap \text{Ker}[dF_2(M_0)]$$

104. Question de synthèse

Comparer les définitions de points réguliers pour une courbe plane, une surface et une courbe gauche définies implicitement.

105. ∇ Si M_0 est un point régulier de la courbe gauche

$$\Gamma = [F(x, y, z) = 0],$$

alors la **tangente** à Γ au point M_0 est la droite affine

$$M_0 + \text{Ker}[dF(M_0)].$$

106. Propriété à vérifier

Si M_0 est un point régulier de Γ , alors la tangente à Γ au point M_0 est l'intersection des plans tangents aux surfaces Σ_1 et Σ_2 .

$$T_{M_0}(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = (T_{M_0}\Sigma_1) \cap (T_{M_0}\Sigma_2)$$

Elle est dirigée par le vecteur

$$[\nabla F_1(M_0)] \wedge [\nabla F_2(M_0)].$$

107. Propriété à vérifier

Les points de la sphère $\Sigma_1 = [x^2 + y^2 + z^2 = 1]$, du cylindre de révolution

$$\Sigma_2 = [x^2 + y^2 = \frac{1}{4}]$$

et de la courbe $\Gamma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ sont tous réguliers.

108. Propriété à vérifier

Tous les points de la courbe

$$[x^2 + y^2 + z^2 = 1] \cap \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \right]$$

sont réguliers sauf le point $M_0 = (1, 0, 0)$.

Théorème des fonctions implicites

109. → Soient F_1 et F_2 , deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $U \subset \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ et $M_0 \in U$, un point tel que

$$F_1(M_0) = F_2(M_0) = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(M_0) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(M_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(M_0) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(M_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Alors il existe trois réels $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ et une fonction

$$\varphi \in \mathcal{C}^1([x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \mathbb{R}^2))$$

tels que

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \iff (y, z) = \varphi(x)$$

pour tout $(x, y, z) \in U$ tel que

$$|x - x_0| < \alpha, \quad |y - y_0| < \beta \quad \text{et} \quad |z - z_0| < \gamma.$$

110. Propriété à vérifier

Si $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, alors $F(x_0) = (y_0, z_0)$.

111. Propriété à vérifier

Si $\varphi = (\varphi_2, \varphi_3)$, alors

$$F_1(x, \varphi_2(x), \varphi_3(x)) = F_2(x, \varphi_2(x), \varphi_3(x)) = 0$$

pour tout x voisin de x_0 . En déduire $\varphi'_2(x_0)$ et $\varphi'_3(x_0)$.

Questions de synthèse**112. Question de synthèse**

Comparer les théorèmes I.3, II.3 et III.2. Formuler un énoncé général du théorème des fonctions implicites.

113. Question de synthèse

Les différentes définitions des droites tangentes et des plans tangents ne valent que pour des points réguliers : pourquoi ?

114. Question de synthèse

De toutes les droites qui passent par le point M_0 d'une courbe Γ , la tangente $T_{M_0}\Gamma$ est celle qui est la plus proche de Γ : justifier en étudiant les différentes représentations possibles de Γ .

115. Question de synthèse

De tous les plans qui passent par le point M_0 d'une surface Σ , le plan tangent $T_{M_0}\Sigma$ est celui qui est le plus proche de Σ : justifier en étudiant les différentes représentations possibles de Σ .