RMS 2022 [1151]

Variante classique

❧ On considère deux isométries u et v et on suppose que la combinaison convexe

$$w = \frac{u + 2v}{3}$$

est également une isométrie.

Pour tout vecteur x, on a donc

$$\begin{aligned} \|x\| = \big\|w(x)\big\| &= \frac{\|u(x) + 2v(x)\|}{3} && \text{(homogénéité de la norme)} \\ &\leqslant \frac{\|u(x)\| + 2\|v(x)\|}{3} && \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant \frac{\|x\| + 2\|x\|}{3} = \|x\|. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|u(x) + 2v(x)\| = \|u(x)\| + \|2v(x)\|$$

et donc (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire) que les vecteurs $u(x)$ et $2 \cdot v(x)$ sont colinéaires et de même sens : il existe donc un réel $\lambda > 0$ tel que

$$v(x) = \lambda \cdot u(x).$$

Or u et v sont des isométries, donc

$$\|u(x)\| = \|x\| = \|v(x)\| = \lambda\,\|u(x)\|,$$

donc $\lambda = 1$ (en supposant que $x \neq 0_E$).

On a ainsi démontré que

$$\forall\, x \in E, \qquad v(x) = u(x)$$

(propriété qui est évidente pour $x = 0_E$).

Énoncé original

On considère deux matrices orthogonales A et B, et on suppose que la matrice

$$M = \frac{1}{3} \cdot A + \frac{2}{3} \cdot B$$

est aussi orthogonale.

En développant les produits $M.M^\top = M^\top.M$, on obtient après simplifications

$$A.B^\top + B.A^\top = B^\top.A + A^\top.B = 2I_n.$$

En multipliant la seconde relation à gauche par B et à droite par $A^\top$, on en déduit que

$$2B.A^\top = I_n + B.A^\top.B.A^\top$$

c'est-à-dire

$$(B.A^\top - I_n)^2 = 0_n.$$

La matrice orthogonale $B.A^\top$ admet donc $(X-1)^2$ pour polynôme annulateur.

❧ **Première fin (très savante)**

D'après le Théorème de réduction des isométries, une matrice dont la seule valeur propre complexe est égale à 1 est la matrice identité, donc $B.A^\top = I_n$, c'est-à-dire $B = A$.

❧ **Deuxième fin (moins savante)**

Notons u, l'endomorphisme de E représenté par la matrice $M = B.A^\top$ dans une BON $\mathscr{B}_0$. Comme u admet un polynôme annulateur scindé, il est trigonalisable : il existe donc une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit une matrice triangulaire supérieure.

D'après l'algorithme de Gram-Schmidt, il existe une BON $\mathscr{B}_1$ telle que la matrice de passage $Q = \mathfrak{Mat}(\mathscr{B} \to \mathscr{B}_1)$ soit triangulaire supérieure. Par conséquent,

$$T = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u) = Q^{-1} \times \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \times Q$$

est une matrice triangulaire (en tant que produit de trois matrices triangulaires supérieures) et orthogonale (puisqu'elle représente l'isométrie u dans la BON $\mathscr{B}_1$).

De plus, comme u admet $(X-1)^2$ comme polynôme annulateur, tous les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire T sont égaux à 1 (ce sont les valeurs propres de u). La seule matrice orthogonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 est l'identité, donc

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u) = I_n$$

et par conséquent $u = I_E$, ce qui prouve que $A = B$.

❧ **Troisième fin avec une astuce matricielle ? ? ?**

(À suivre (peut-être))