RMS 2022 [497]

> *Soient* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^2 = A$ *et* $\Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par*
>
> $$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = AM + MA.$$
>
> *Démontrer que* Φ *est diagonalisable.*

❧ Comme $A^2 = A$,

$$\begin{aligned}\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi \circ \Phi(M) &= \Phi(AM + MA)\\ &= \Phi(M) + 2AMA,\\ \Phi^3(M) &= \Phi(M) + 6AMA.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\Phi^3 - 3\Phi^2 = -2\Phi$$

et donc que

$$X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$$

est un polynôme annulateur de Φ. Comme ce polynôme est scindé à racines simples, on en déduit que Φ est diagonalisable.