RMS 2022 [531]

Soit A, une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.
$\boxed{1}$ *On considère une fonction continue $f : [0,1] \to E$ telle que $f(0) \in A$ et $f(1) \notin A$. Démontrer qu'il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $f(t_0)$ appartienne à la frontière ∂A de A.*
$\boxed{2}$ *Démontrer que : si A est distinct de E et de l'ensemble vide, alors sa frontière n'est pas vide.*

✍ *On rappelle que $\overline{A} = A^\circ \sqcup \partial A$ (par définition) et que*

$$A = \mathring{A} \sqcup \partial A \sqcup B$$

où B est le complémentaire de l'adhérence de A (B est donc ouvert).

$\boxed{1}$ Comme $f(1) \in A^c$, alors deux cas se présentent : ou bien $f(1) \in \partial A$ (et dans ce cas, il n'y a plus rien à démontrer), ou bien $f(1) \in B$. Dans la suite, on peut donc supposer que $f(1) \in B$.

❧ On considère l'ensemble

$$X = \{t \in [0,1] \; : \; f(t) \in A\}.$$

Il s'agit d'une partie de $[0,1]$, donc d'une partie bornée de $\mathbb{R}$.

Par hypothèse, $f(0) \in A$, donc $0 \in X$: c'est une partie non vide.

D'après l'axiome de la borne supérieure, l'ensemble X admet une borne supérieure t_0 et nous allons démontrer que $f(t_0)$ appartient à la frontière de A, c'est-à-dire (par définition de l'adhérence) que $f(t_0)$ appartient à l'adhérence de A sans appartenir à l'intérieur de A.

❧ Par hypothèse, $f(1) \in B$ et comme B est ouvert, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \|x - f(1)\| \leqslant r \implies x \in B \subset A^c.$$

Comme f est continue, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [1-\alpha, 1], \quad \|f(t) - f(1)\| \leqslant r.$$

Par conséquent

$$\forall\, t \in [1-\alpha, 1], \quad f(t) \in A^c.$$

On en déduit que $0 \leqslant t_0 \leqslant 1 - \alpha < 1$.

❧ Comme t_0 est la borne supérieure de X, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers t_0, c'est-à-dire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) \in A \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = t_0.$$

Par continuité de f,

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(t_0) \in \overline{A}.$$

❧ Si $f(t_0)$ appartenait à l'intérieur de A, alors il existerait un réel $r > 0$ tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \|x - f(t_0)\| \leqslant r \implies x \in \mathring{A}.$$

Par continuité de f et comme $t_0 < 1$, il existerait alors $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [t_0, t_0+\alpha], \quad \|f(t) - f(t_0)\| \leqslant r$$

et par conséquent

$$\forall\, t \in [t_0, t_0+\alpha], \quad f(t) \in \mathring{A} \subset A.$$

Cela signifierait que $[t_0, t_0 + \alpha] \subset X$ et contredirait donc la définition de t_0 comme borne supérieure de X.

Par conséquent, $f(t_0)$ n'appartient pas à l'intérieur de A et appartient bien à la frontière de A.

2❧ Si $A \neq \varnothing$ et $A \neq E$, alors il existe $x \in A$ et $y \in A^c$. Comme E est un espace vectoriel, il est convexe et la fonction affine (donc continue)

$$f = [t \mapsto (1-t)x + ty] \ : \ [0,1] \to E$$

vérifie

$$f(0) \in A \quad \text{et} \quad f(1) \notin A.$$

D'après la question précédente, la frontière de A possède au moins un point.