RMS 2022 [174]

Soit $n \geqslant 5$. L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni de sa structure euclidienne canonique, on considère un sous-espace V de dimension $k \leqslant n-4$. La projection orthogonale sur V est notée π_V et la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de cette projection est notée P.
On note A, la matrice P privée de sa diagonale et $D = P - A$.
On considère un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Les coordonnées $X_1, \dots, X_n$ sont supposées indépendantes et de même loi :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}(X_k = \pm 1) = \frac{1}{2}.$$

On étudie ici la variable aléatoire

$$R = d(X, V) = \min_{v \in V} \|X - v\|.$$

1 *Démontrer que $R(\omega) \leqslant \sqrt{n}$ pour tout $\omega \in \Omega$.*
2 *Démontrer que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad d(x,V)^2 = \langle\, x \,|\, x - \pi_V(x)\,\rangle.$$

3 *En déduire que*

$$R^2 = n - k - X^\top.A.X.$$

Calculer $\mathbf{E}(R^2)$.
4 *Démontrer que $\operatorname{tr} D^2 \geqslant k^2/n$.*
5 *Démontrer que*

$$\mathbf{E}\big[(X^\top.A.X)^2\big] \leqslant \frac{2k(n-k)}{n}.$$

6 *Démontrer que*

$$\mathbf{P}(R \geqslant \sqrt{n-k} + 2) \leqslant \frac{k}{8n}.$$

1 D'après le cours,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad d(x,V)^2 = \|x - \pi_V(x)\|^2.$$

Par conséquent, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$R(\omega)^2 = \big\|X(\omega) - \pi_V\big(X(\omega)\big)\big\|^2 = \big\|(I - \pi_V)\big(X(\omega)\big)\big\|^2 \leqslant \big\|X(\omega)\big\|^2$$

puisque $I - \pi_V$ est une projection orthogonale (la projection orthogonale sur $V^\perp$).

Comme les coordonnées de X sont des variables aléatoires de Rademacher,

$$\big\|X(\omega)\big\|^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2(\omega) = n$$

et on a donc

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad 0 \leqslant R(\omega) \leqslant \sqrt{n}.$$

2 Cf cours.
3 (Dorénavant, la variable ω sera sous-entendue.)

Pour le produit scalaire canonique, la base canonique est une base orthonormée. Par conséquent, d'après la première question,

$$\begin{aligned} R^2 &= X^\top.(I-P).X \\ &= X^\top.(I-D-A).X \\ &= X^\top.(I-D).X - X^\top.A.X. \end{aligned}$$

En notant $c_1, \dots, c_n$, les coefficients diagonaux de la matrice D,

$$\begin{aligned}
R^2 &= \sum_{i=1}^{n} (1-c_i)X_i^2 - X^\top.A.X \\
&= \sum_{i=1}^{n} (1-c_i) - X^\top.A.X && (\text{car } X_i^2 = 1) \\
&= (n - \operatorname{tr} D) - X^\top.A.X.
\end{aligned}$$

Par définition, les coefficients diagonaux de D sont aussi les coefficients diagonaux de P, donc $\operatorname{tr} D = \operatorname{tr} P = \operatorname{rg} P$ (puisque la trace de toute projection est aussi le rang de cette projection). Comme π_V est la projection sur un sous-espace de dimension k, le rang de P est égal à k et on a donc bien

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad R^2(\omega) = n - k - X^\top(\omega).A.X(\omega).$$

❧ Comme R^2 est une variable aléatoire bornée, c'est une variable aléatoire d'espérance finie.

En notant $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a $a_{i,i} = 0$ (par construction de A) et d'après la formule du produit matriciel,

$$X^\top.A.X = \sum_{i \neq j} X_i.a_{i,j}.X_j.$$

Il s'agit d'une combinaison linéaire de variables aléatoires bornées. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X^\top.A.X) = \sum_{i \neq j} a_{i,j}\, \mathbf{E}(X_i X_j).$$

Or X_i et X_j sont des variables aléatoires indépendantes (puisque $i \neq j$) et centrées, donc

$$\forall\, i \neq j, \quad \mathbf{E}(X_i X_j) = \mathbf{E}(X_i)\, \mathbf{E}(X_j) = 0$$

donc $\mathbf{E}(X^\top.A.X) = 0$ et finalement

$$\mathbf{E}(R^2) = n - k.$$

4❧ Avec les notations utilisées plus haut,

$$\operatorname{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

On a déjà remarqué que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \operatorname{tr} D = \operatorname{tr} P = k.$$

D'après l'inégalité de Schwarz,

$$k = \sum_{i=1}^{n} c_i.1 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^{n} 1^2\Big)^{1/2} = \sqrt{n}\sqrt{\operatorname{tr}(D^2)}$$

et par conséquent

$$\operatorname{tr}(D^2) \geqslant \frac{k^2}{n}.$$

5❧ On a justifié précédemment que

$$X^\top.A.X = \sum_{i \neq j} a_{i,j} X_i X_j$$

était une combinaison linéaire de variables aléatoires centrées. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big[(X^\top.A.X)^2\big] &= \mathbf{V}\Big(\sum_{i \neq j} a_{i,j} X_i X_j\Big) \\
&= \sum_{i \neq j} a_{i,j}^2\, \mathbf{V}(X_i X_j) + \sum_{\substack{(i,j) \neq (p,q) \\ \text{avec } i \neq j,\, p \neq q}} a_{i,j} a_{p,q}\, \mathbf{Cov}(X_i X_j, X_p X_q).
\end{aligned}$$

❧ Pour $i \neq j$, le produit X_iX_j est une variable aléatoire centrée, donc

$$\mathbf{V}(X_iX_j) = \mathbf{E}(X_i^2X_j^2) = \mathbf{E}(1) = 1.$$

❧ Pour $(i,j) \neq (p,q)$ avec $i \neq j$ et $p \neq q$, il faut distinguer plusieurs cas.

► Si $\{i,j\} \cap \{p,q\} = \varnothing$, alors X_iX_j et X_pX_q sont indépendantes (lemme des coalitions), donc leur covariance est nulle.

► Si $\{i,j\} \cap \{p,q\}$ est un singleton, on peut supposer que $i = p$ et $j \neq q$ (puisque $i \neq j$ et $p \neq q$). Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(X_iX_j, X_iX_q) &= \mathbf{E}(X_i^2X_jX_q) - \mathbf{E}(X_iX_j)\,\mathbf{E}(X_iX_q)\\ &= \mathbf{E}(X_jX_q) = 0\end{aligned}$$

puisque $X_i^2 = 1$ et que les trois variables aléatoires X_iX_j, X_iX_q et X_jX_q sont centrées (les indices sont distincts).

► Enfin, si $\{i,j\} = \{p,q\}$, alors $i = q$ et $j = p$ (puisque les couples (i,j) et (p,q) sont distincts), donc

$$\mathbf{Cov}(X_iX_j, X_jX_i) = \mathbf{V}(X_iX_j) = 1.$$

Ainsi,

$$\mathbf{V}\Big(\sum_{i\neq j} a_{i,j}X_iX_j\Big) = \sum_{i\neq j} a_{i,j}^2 + \sum_{i\neq j} a_{i,j}a_{j,i}.$$

Comme elle représente une projection orthogonale dans une base orthonormée, la matrice P est symétrique (réelle) et la matrice A est symétrique elle aussi, donc

$$\mathbf{E}\big[(X^\top.A.X)^2\big] = \mathbf{V}\Big(\sum_{i\neq j} a_{i,j}X_iX_j\Big) = 2\sum_{i\neq j} a_{i,j}^2.$$

❧ Il est temps de se souvenir de l'expression du produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[(X^\top.A.X)^2\big] &= 2\Big[\sum_{i,j} a_{i,j}^2 - \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2\Big]\\ &= 2\big[\operatorname{tr}(P^\top.P) - \operatorname{tr}(D^\top.D)\big]\\ &= 2\big[\operatorname{tr} P - \operatorname{tr}(D^2)\big]\end{aligned}$$

puisque $P^\top.P = P^2 = P$ (matrice de projection orthogonale relative à une base orthonormée) et $D^\top.D = D^2$ (matrice diagonale, donc symétrique).

On a vu plus haut que $\operatorname{tr} P = k$ et d'après la minoration de la question précédente,

$$\mathbf{E}\big[(X^\top.A.X)^2\big] = 2\big[k - \operatorname{tr}(D^2)\big] \leqslant 2\Big[k - \frac{k^2}{n}\Big] = \frac{2(n-k)k}{n}.$$

6❧ Comme R est une variable aléatoire positive,

$$\begin{aligned}[R \geqslant \sqrt{n-k}+2] &= \big[R^2 \geqslant n-k+4+4\sqrt{n-k}\big]\\ &= \big[-X^\top.A.X \geqslant 4+4\sqrt{n-k}\big]\\ &\subset \big[(X^\top.A.X)^2 \geqslant 16(1+\sqrt{n-k})^2\big].\end{aligned}$$

On déduit alors de l'inégalité de Markov et de la majoration précédente que

$$\mathbf{P}\big(R \geqslant \sqrt{n-k}+2\big) \leqslant \frac{\mathbf{E}\big((X^\top.A.X)^2\big)}{16(1+\sqrt{n-k})^2} \leqslant \frac{k}{8n}\cdot\frac{(n-k)}{(1+\sqrt{n-k})^2} \leqslant \frac{k}{8n}.$$