RMS 2021 [1361]

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application f_n définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}.$$

1❧ *Tracer l'allure du graphe de f_n.*

2❧ *Soit $x \in \mathbb{R}$, fixé. La série $\sum f_n(x)$ est-elle convergente ?*

3❧ *Démontrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et telle que*

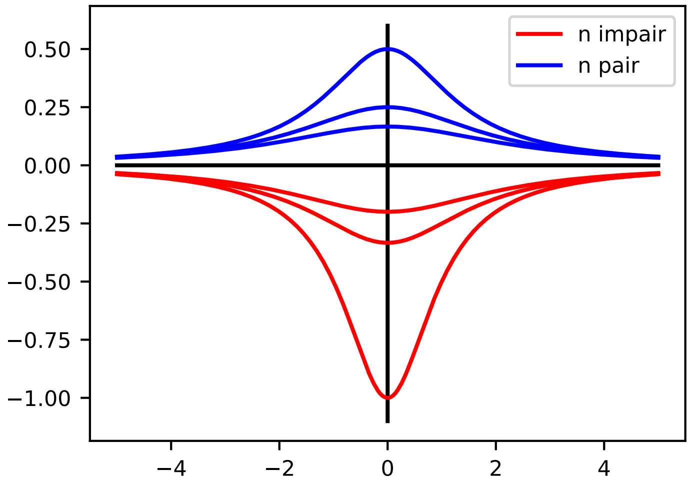
$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \geqslant 1, \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \varepsilon_n.$$

4❧ *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \bigl|f_n(x)\bigr|.$$

Déduire M_n de l'étude des variations de f_n. La série $\sum M_n$ est-elle convergente ?

1❧ Pour n pair, la fonction f_n est paire et positive. Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle tend vers 0 au voisinage de $+\infty$ et admet une tangente horizontale en $t = 0$ (où elle atteint son maximum, égal à $1/n$).



Pour n impair, la fonction f_n est négative, mais l'allure globale de $-f_n$ est exactement celle de f_{2k}.

2❧ La série $\sum f_n(x)$ est alternée et $|f_n(x)|$ tend vers 0 en décroissant. D'après le Critète spécial des séries alternées, la série $\sum f_n(x)$ est convergente.

✍ *La somme*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

est donc définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et l'application S est évidemment paire.

3 ❧ Puisque les hypothèses du Critère spécial des séries alternées sont vérifiées,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant 1, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leqslant \left| f_{n+1}(x) \right| \leqslant \left| f_{n+1}(0) \right| = \frac{1}{n+1}.$$

On a trouvé un majorant indépendant de $x \in \mathbb{R}$ et qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

✍ *Autrement dit, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et comme les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la somme S est aussi une fonction continue sur $\mathbb{R}$.*

4 ❧ D'après l'étude des variations de f_n, la fonction $|f_n|$ atteint son maximum en 0, donc

$$M_n = \left| f_n(0) \right| = \frac{1}{n}.$$

La série $\sum M_n$ est divergente (série harmonique).

✍ *La série de fonctions $\sum f_n$ ne converge donc pas normalement sur $\mathbb{R}$ (bien qu'elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$).*