RMS 2021 [1284]

1❧ *Quelles sont les racines complexes du polynôme $X^n - 1$?*
2❧ *En déduire la factorisation de $1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}$ dans $\mathbb{C}[X]$.*
3❧ *En déduire que*

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

1❧ Les racines du polynôme $X^n - 1$ sont les racines n-ièmes de l'unité, c'est-à-dire

$$\forall\, 0 \leqslant k < n, \quad \zeta_k = \exp\frac{2ik\pi}{n}.$$

On sait que ces n racines sont deux à deux distinctes et donc de multiplicité 1. Par conséquent,

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \zeta_k).$$

2❧ D'après la formule de la somme géométrique,

$$X^n - 1 = (X-1)(1 + X + \cdots + X^{n-1})$$

et d'après la factorisation précédente,

$$\prod_{0 \leqslant k < n}(X - \zeta_k) = (X - \zeta_0)(1 + X + \cdots + X^{n-1})$$

donc, en simplifiant par $(X - \zeta_0)$,

$$\sum_{0 \leqslant k < n} X^k = \prod_{1 \leqslant k < n}(X - \zeta_k).$$

✍ *L'anneau $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes étant intègre, on peut simplifier par n'importe quel polynôme différent du polynôme nul.*

3❧ En évaluant l'égalité précédente en 1, on obtient

$$n = \prod_{1 \leqslant k < n}(1 - \zeta_k) = \prod_{k=1}^{n-1}(e^{i0} - e^{ik\theta})$$

en posant $\theta = {}^{2\pi}/_{n}$. On factorise par l'angle moitié :

$$\begin{aligned}
n &= \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\theta/2}\Big(-2i\sin\frac{k\theta}{2}\Big)\\
&= (-2i)^{n-1}\exp\Big(i\pi\,\frac{1 + \cdots + (n-1)}{n}\Big)\prod_{1 \leqslant k < n}\sin\frac{k\pi}{n}\\
&= (-2i)^{n-1}\exp\Big(\frac{i(n-1)\pi}{2}\Big)\prod_{1 \leqslant k < n}\sin\frac{k\pi}{n}\\
&= (-2i)^{n-1}i^{n-1}\prod_{1 \leqslant k < n}\sin\frac{k\pi}{n} = 2^{n-1}\prod_{1 \leqslant k < n}\sin\frac{k\pi}{n}.
\end{aligned}$$