RMS 2021 [1287]

Soit f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

1❧ *On considère les vecteurs $\varepsilon_1 = (1,1)$ et $\varepsilon_2 = (2,1)$.*
❦ *Démontrer que $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.*
❦ *Donner la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathscr{B}$.*
❦ *Quelle est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$?*

2❧ *On suppose que l'endomorphisme $g \in L(\mathbb{R}^2)$ vérifie*

$$g \circ g = f.$$

❦ *Démontrer que $g \circ f = f \circ g$.*
❦ *Vérifier que*

$$\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1 \quad \textit{et que} \quad \operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id}) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_2.$$

❦ *En déduire que la matrice de g relative à la base $\mathscr{B}$ est diagonale.*

3❧ *Résoudre l'équation $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.*

1❧ Les vecteurs ε_1 et ε_2 ne sont pas proportionnels, donc la famille $\mathscr{B}$ est libre. En tant que famille libre de deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension deux, la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

❧ Par définition, la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathscr{B}$ s'obtient en écrivant en colonne les décompositions des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans la base canonique, donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

❧ Il s'agit de calculer $f(\varepsilon_1)$ et $f(\varepsilon_2)$. Dans la base canonique,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que $f(\varepsilon_1) = 1 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2$ et que $f(\varepsilon_2) = 0 \cdot \varepsilon_1 + 4 \cdot \varepsilon_2$. Par conséquent,

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

✍ *D'après la formule de changement de base, on a aussi*

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P^{-1}AP.$$

Mais pour appliquer cette formule, il faut déjà calculer

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2❧ D'après l'hypothèse sur g et la commutativité des itérés d'un endomorphisme,

$$f \circ g = (g \circ g) \circ g = g \circ (g \circ g) = g \circ f.$$

❧ On travaille dans la base canonique :

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(f - \operatorname{Id}) = A - I_2 = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{Mat}_{\text{can}}(f - 4\operatorname{Id}) = A - 4I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices sont de rang 1. D'après le Théorème du rang, leurs noyaux sont des sous-espaces de dimension 1 et comme on sait que $\varepsilon_1 \in \operatorname{Ker}(f \operatorname{Id})$ et que $\varepsilon_2 \in \operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id})$, on en déduit que

$$\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_1, \qquad \operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id}) = \mathbb{R} \cdot \varepsilon_2.$$

❧ Il s'agit de calculer, autant que possible, les vecteurs $g(\varepsilon_1)$ et $g(\varepsilon_2)$ et plus précisément de vérifier que $g(\varepsilon_k)$ est proportionnel à ε_k pour $k \in \{1, 2\}$.

D'après la question précédente, il suffit de vérifier que

$$g(\varepsilon_1) \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \quad \text{et que} \quad g(\varepsilon_2) \in \operatorname{Ker}(f - 4\operatorname{Id}).$$

Or, comme f et g commutent,

$$\begin{aligned}(f - \operatorname{Id})\big[g(\varepsilon_1)\big] &= (f \circ g)(\varepsilon_1) - g(\varepsilon_1) \\ &= (g \circ f)(\varepsilon_1) - g(\varepsilon_1) = g(1 \cdot \varepsilon_1) - g(\varepsilon_1) \\ &= 0_E\end{aligned}$$

et de la même manière

$$\begin{aligned}(f - 4\operatorname{Id})\big[g(\varepsilon_2)\big] &= (f \circ g)(\varepsilon_2) - 4 \cdot g(\varepsilon_2) \\ &= (g \circ f)(\varepsilon_2) - 4 \cdot g(\varepsilon_2) = g(4 \cdot \varepsilon_2) - 4 \cdot g(\varepsilon_2) \\ &= 0_E\end{aligned}$$

Cela prouve que la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ est diagonale.

✍ *Comme f et g commutent, chaque sous-espace propre de f est stable par g. Comme ces sous-espaces propres sont des droites, les vecteurs qui dirigent ces droites sont nécessairement des vecteurs propres de g. La base $\mathscr{B}$ est donc une base de vecteurs propres pour f* ***et*** *pour g : ces endomorphismes sont dits* co-diagonalisables.

3❧ Si $M^2 = A$, alors l'endomorphisme g représenté dans la base canonique par la matrice M vérifie $g \circ g = f$. D'après ce qui précède, il existe α et β tels que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

et comme $g \circ g = f$, alors

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et donc $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 = 4$.

Réciproquement, quels que soient les scalaires α et β tels que $\alpha^2 = 1$ et $\beta^2 = 4$,

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^2 = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$$

ce qui prouve que l'endomorphisme g tel que

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

vérifie $g \circ g = f$ et donc que

$$\left(P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1}\right)^2 = A.$$

L'équation $M^2 = A$ admet donc exactement quatre solutions :

$$P \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

soit

$$\pm \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \pm \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

✍ *Comme l'anneau $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas intègre, il est normal qu'une équation du second degré admette plus de deux solutions.*