RMS 2021 [1289]

> *On considère l'application f définie par*
>
> $$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = P - P'.$$
>
> **1❧** *Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.*
> **2❧** *Quelle est l'image de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ par f ?*
> **3❧** *Démontrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.*
> **4❧** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.*
> ❦ *Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = Q$.*
> ❦ *Calculer $f(P'), f(P''), \dots, f(P^{(n)})$ en fonction de Q.*
> ❦ *En déduire le polynôme P.*

1❧ Par linéarité de la dérivation sur $\mathbb{R}[X]$, l'application f est linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, donc c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2❧ Il est clair que $f(1) = 1$ (vecteur propre !) et que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad f(X^k) = X^k - kX^{k-1}.$$

3❧ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il est clair que $\deg f(X^k) = k$, donc la famille $\big(f(X^k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ (échelonnée en degré).

Comme l'image par f d'une base de $\mathbb{R}[X]$ est une base de $\mathbb{R}[X]$, on peut conclure que f est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

4❧ Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on sait que $\deg(P') \leqslant \deg P$ et donc

$$\deg f(P) = \deg(P - P') \leqslant \deg P.$$

En particulier, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\deg f(P) \leqslant \deg P \leqslant n$$

donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$, ce qui prouve que le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f.

❧ On peut donc considérer f comme un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension finie. D'après la question précédente, cet endomorphisme est injectif et donc, d'après le Théorème du rang, il réalise une bijection de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un, et un seul, polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = Q$.

✍ *Il serait bon d'évoquer ici l'endomorphisme f_n induit par restriction de f au sous-espace stable $\mathbb{R}_n[X]$ — car c'est bien de lui qu'on parle ici.*

La matrice de cet endomorphisme relative à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est une matrice triangulaire de $\mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1. Cette matrice est donc inversible (ce qui n'est pas une surprise), mais elle n'est pas diagonalisable (car elle est distincte de I_{n+1}).

❧ On vérifie par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f(P^{(k)}) = P^{(k)} - P^{(k+1)}.$$

En particulier, comme $\deg P \leqslant n$, on a $f(P^{(n)}) = P^{(n)}$ et $f(P^{(k)}) = 0$ pour tout $k > n$.

❧ Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\begin{aligned}
P &= P^{(n+1)} + \sum_{k=0}^{n} (P^{(k)} - P^{(k+1)}) && \text{(par télescopage)}\\
&= 0 + \sum_{k=0}^{n} f(P^{(k)}) && \text{(car } \deg P \leqslant n\text{)}\\
&= f\Big(\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}\Big) && \text{(par linéarité de } f\text{)}
\end{aligned}$$

Comme f est injective, on en déduit que l'unique antécédent de P par f est le polynôme

$$Q = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}.$$