RMS 2021 [1331]

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A.A^\top.A = I_n$.
1❧ *Démontrer que A est symétrique.*
2❧ *Démontrer que $A = I_n$.*

1❧ Comme A est une matrice carrée et que

$$A.(A^\top.A) = I_n,$$

la matrice A est inversible et $A^{-1} = A^\top.A$. En particulier, A^{-1} est une matrice symétrique, donc $A = (A^{-1})^{-1}$ est aussi une matrice symétrique.

✍ *On doit savoir que l'inverse d'une matrice inversible et symétrique est aussi une matrice symétrique.*

2❧ Comme A est symétrique, l'équation devient $A^3 = I_n$. La matrice A admet donc

$$X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1)$$

pour polynôme annulateur. Mais la matrice A est symétrique et réelle, donc elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles (Théorème spectral). En particulier, son polynôme minimal est un diviseur unitaire, scindé, à racines réelles simples du polynôme annulateur $X^3 - 1$: le polynôme minimal de A est donc $(X-1)$, ce qui prouve que $A = I_3$.