RMS 2021 [1401]

> **1❧** *Résoudre l'équation différentielle*
>
> $$\forall\, t<1,\quad (1-t)x'(t)-x(t)=\frac{1}{1-t}.$$
>
> **2❧** *Démontrer que les solutions de* (E) *sont développables en série entière au voisinage de* 0*.*
>
> **3❧** *Comment trouver les coefficients du développement en série entière d'une solution de* (E) *?*

1❧ La fonction x est une solution de l'équation homogène si, et seulement si, il existe un réel λ tel que

$$\forall\, t<1,\qquad x(t)=\lambda\cdot\frac{1}{1-t}.$$

La fonction $x_0=[t\mapsto K(t)x(t)]$ est une solution de l'équation complète si, et seulement si,

$$\forall\, t<1,\qquad (1-t)\cdot\left[K'(t)\cdot\frac{1}{1-t}\right]=\frac{1}{1-t}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, t<1,\qquad K(t)=K_0-\ell n(1-t).$$

La fonction x est donc solution de l'équation différentielle si, et seulement si, il existe un réel K_0 tel que

$$\forall\, t<1,\quad x(t)=\frac{K_0}{1-t}-\frac{\ell n(1-t)}{1-t}.$$

Comme $\frac{1}{1-t}$ et $\ell n(1-t)$ sont développables en série entière au voisinage de l'origine, alors toute solution de l'équation différentielle est développable en série entière au voisinage de l'origine (par produit et somme).

2❧ S'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $r>0$ tels que

$$\forall\, t\in\,]-r,r[,\quad x(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kt^k,$$

alors

$$\forall\, t\in\,]-r,r[,\quad x'(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}ka_kt^{k-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}t^k$$

puisqu'on peut dériver terme à terme la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est strictement positif.

L'équation (E) devient alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}t^k-\sum_{k=1}^{+\infty}ka_kt^k-\sum_{k=0}^{+\infty}a_kt^k=\sum_{k=0}^{+\infty}t^k$$

c'est-à-dire (en ajoutant un terme nul dans la seconde somme)

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\big((k+1)a_{k+1}-(k+1)a_k\big)t^k=\sum_{k=0}^{+\infty}t^k.$$

pour tout $t\in\,]-r,r[$. Comme $r>0$, on peut en déduire que

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\quad (k+1)(a_{k+1}-a_k)=1$$

par identification terme à terme.

Comme toutes les solutions de (E) sont développables en série entière, on en déduit (par télescopage) que x est solution de (E) si, et seulement si, il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

✍ *On retrouve ainsi que*

$$\forall\, t \in]-1,1[, \quad x(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n$$

en notant comme d'habitude les nombres harmoniques *:*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On vérifie ainsi l'expression générale trouvée précédemment :

$$x(t) = a_0 \cdot \frac{1}{1-t} + \big(-\ell n(1-t)\big) \cdot \frac{1}{1-t}.$$

✍ *On aurait pu aussi bien tirer les coefficients du développement en série entière de $x(t)$ en appliquant le Théorème sur le produit de Cauchy : sachant que*

$$\forall\, t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 \cdot t^n$$
$$-\ell n(1-t) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot t^n$$

et que $c_0 = 0 \times 1 = 0$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0 \times 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \times 1 = H_n,$$

on a bien

$$\forall\, t \in]-1,1[, \quad x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_0 t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n.$$

Au passage, on a enfin prouvé ainsi que le rayon de convergence était égal à 1 (au moins égal à 1 avec les calculs qui précèdent, pas plus grand que 1 au vu de la somme de la série entière).