Calcul différentiel

1. Le point de vue affine
On considère ici des fonctions définies sur un espace vectoriel normé E de dimension finie (ou sur une partie de E), à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie lui aussi.
Une fonction $f : E \to F$ est dite ***numérique*** lorsque son espace d'arrivée F est égal à $\mathbb{R}$.
Nous utiliserons la structure affine de ces deux espaces vectoriels, c'est-à-dire que leurs éléments seront considérés comme des ***points***. Les vecteurs, qui servent alors à passer d'un point à un autre par une translation, seront notés en lettres grasses.

Éléments de topologie

2. La ***topologie*** est une partie de la géométrie qui néglige les formes (cercles, triangles, carrés...) et considère seulement les relations de position : la notion centrale de ***voisinage*** sert à définir la convergence des suites et la continuité des fonctions.
La topologie d'un espace vectoriel de dimension finie E est définie par une norme.
2.1 On dit que la famille $(\boldsymbol{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E est une ***suite convergente*** lorsqu'il existe un vecteur $\boldsymbol{\ell} \in E$, dit ***limite***, tel que la suite réelle $(\|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{\ell}\|)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0.
2.2 Voisinage d'un point
Une partie V de E est un ***voisinage*** du point M_0 si, et seulement si, elle contient tous les points de la forme

$$M = M_0 + \boldsymbol{h}$$

où la norme du vecteur $\boldsymbol{h}$ est assez proche de 0, c'est-à-dire

$$\exists\, r > 0,\ \forall\, \|\boldsymbol{h}\| \leqslant r, \quad M_0 + \boldsymbol{h} \in V.$$

2.3 La fonction f est ***continue*** en M_0 lorsque l'expression réelle $\|f(M_0 + \boldsymbol{h}) - f(M_0)\|$ tend vers 0 lorsque le réel $\|\boldsymbol{h}\|$ tend vers 0.
3. Ouvert
Une partie U de E est un ***ouvert*** si, et seulement si, c'est un voisinage de chacun de ses points : pour tout point $M_0 \in U$, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall\, \boldsymbol{h} \in E, \quad \|\boldsymbol{h}\| \leqslant r \implies (M_0 + \boldsymbol{h}) \in U.$$

Lorsqu'une fonction f est définie sur un ouvert, on peut étudier localement cette fonction autour de chaque point de son ensemble de définition.
4. Équivalence des normes
Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes : si une propriété topologique (la convergence d'une suite, la continuité d'une fonction, le fait qu'une partie soit ouverte...) est établie pour une norme particulière, alors elle est vraie pour *toutes* les normes.
4.1 Dans $\mathbb{R}^2$, la distance euclidienne canonique de

$$M_0 = (x_0, y_0) \quad \text{à} \quad M = M_0 + \boldsymbol{h} = (x_0 + h_x, y_0 + h_y)$$

est égale à

$$r = \|\boldsymbol{M_0M}\|_2 = \|\boldsymbol{h}\|_2 = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$$

et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue au point M_0 si, et seulement si, $f(M)$ tend vers $f(M_0)$ lorsque r tend vers 0.
4.2 La ***norme produit*** du vecteur $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ est définie par

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant p} |x_k|.$$

1. La partie $U \subset \mathbb{R}^p$ est un ouvert si, et seulement si, pour chaque point

$$M_0 = (x_0^1, \dots, x_0^p) \in U,$$

il existe $\alpha > 0$ tel que

$$[x_0^1 - \alpha, x_0^1 + \alpha] \times \dots \times [x_0^p - \alpha, x_0^p + \alpha] \subset U.$$

2. Une suite $(\boldsymbol{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ converge vers le vecteur $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^p$ si, et seulement si, il y a convergence coordonnée par coordonnée :

$$\boldsymbol{u}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boldsymbol{\ell} \iff \forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad u_n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^k.$$

3. Une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}^p$:

$$f = \big[x \mapsto f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_p(x)\big)\big]$$

est continue au point x_0 si, et seulement si, chacune de ses composantes est continue au point x_0 :

$$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0) \iff \forall\, 1 \leqslant k \leqslant p, \quad f_k(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f_k(x_0).$$

5. Ordres de grandeur au voisinage de M_0
Pour tout $\alpha > 0$, on note

$$f(M_0 + \boldsymbol{h}) = o(\|\boldsymbol{h}\|^\alpha) \quad \text{ou} \quad f(M_0 + \boldsymbol{h}) = \mathcal{O}(\|\boldsymbol{h}\|^\alpha)$$

pour signifier respectivement que le rapport

$$\frac{\|f(M_0 + \boldsymbol{h})\|_F}{\|\boldsymbol{h}\|_E^\alpha}$$

tend vers 0 ou reste borné lorsque le vecteur déplacement $\boldsymbol{h}$ tend vers $\mathbf{0}_E$.
Pour $\alpha = 1$, on allège les notations en écrivant $o(\boldsymbol{h})$ et $\mathcal{O}(\boldsymbol{h})$ au lieu de $o(\|\boldsymbol{h}\|)$ et $\mathcal{O}(\|\boldsymbol{h}\|)$ respectivement.
6. Applications linéaires
Comme E est un espace vectoriel de dimension finie, toute application linéaire définie sur E est continue, quelle que soit la norme sur E, quel que soit l'espace vectoriel d'arrivée F.
6.1 Toute application linéaire $\varphi \in \mathrm{L}(E, F)$ est continue sur E et en particulier bornée sur la sphère unité de E. De plus, en posant

$$|||\varphi||| = \sup_{\|\boldsymbol{u}\|_E = 1} \|\varphi(\boldsymbol{u})\|_F,$$

on obtient l'estimation suivante :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in E, \quad \|\varphi(\boldsymbol{x})\|_F \leqslant |||\varphi|||\, \|\boldsymbol{x}\|_E$$

qui traduit la propriété de Lipschitz pour φ. En particulier,

$$\varphi(\boldsymbol{h}) = \mathcal{O}(\boldsymbol{h}) \quad \text{et} \quad \varphi\big(o(\boldsymbol{h})\big) = o(\boldsymbol{h})$$

lorsque $\boldsymbol{h}$ tend vers $\mathbf{0}_E$.
6.2 Si $\varphi(\boldsymbol{h}) = o(\boldsymbol{h})$ au voisinage de $\mathbf{0}_E$, alors φ est l'application nulle.
7. Applications bilinéaires
Soit $\psi : E_1 \times E_2 \to F$, une application bilinéaire, où E_1 et E_2 sont deux espaces vectoriels de dimension finie.
7.1 Quel que soit $x_2 \in E_2$, l'application

$$\Phi(x_2) = [x_1 \mapsto \psi(x_1, x_2)]$$

est une application linéaire de E_1 dans F et l'application Φ est linéaire de E_2 dans $\mathrm{L}(E_1, F)$.
7.2 L'application ψ est continue sur $E_1 \times E_2$ et il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, x_1 \in E_1, \forall\, x_2 \in E_2, \quad \|\psi(x_1, x_2)\| \leqslant K\|x_1\|\, \|x_2\|.$$

I

Fonctions différentiables

8. Contrairement à $\mathbb{R}$, un espace vectoriel E de dimension supérieure à 2 n'est pas naturellement ordonné. Par conséquent, l'étude des *variations* d'une fonction f définie sur E n'a pas de sens.
On se borne donc dans un premier temps à comparer localement une telle fonction f aux fonctions les plus simples qui soient, c'est-à-dire aux fonctions affines. Les fonctions dites ***différentiables*** sont les fonctions pour lesquelles cette comparaison est possible.

I.1 Application linéaire tangente

9. Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et si $f : I \to F$ est dérivable en $t_0 \in I$, alors il existe une application linéaire $\varphi : \mathbb{R} \to F$ telle que $f(t_0 + h) = f(t_0) + \varphi(h) + o(h)$ lorsque h tend vers 0.

10. **Différentiabilité en un point**
Soit U, un ouvert de E.
10.1 ✍ *La fonction $f : U \to F$ est* **différentiable en** $M_0 \in U$ *lorsqu'il existe $\varphi \in \mathrm{L}(E, F)$ telle que*

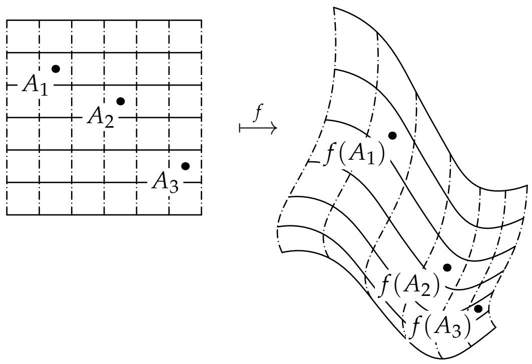
$$f(M_0 + \boldsymbol{h}) = f(M_0) + \varphi(\boldsymbol{h}) + o(\boldsymbol{h})$$

lorsque $\boldsymbol{h}$ tend vers $\mathbf{0}$.
10.2 Il existe au plus une application linéaire $\varphi \in \mathrm{L}(E, F)$ telle que $f(M_0 + \boldsymbol{h}) = f(M_0) + \varphi(\boldsymbol{h}) + o(\boldsymbol{h})$.
10.3 ✍ *Si f est différentiable au point $M_0 \in U$, l'unique application $\varphi \in \mathrm{L}(E, F)$ telle que $f(M_0 + \boldsymbol{h}) = f(M_0) + \varphi(\boldsymbol{h}) + o(\boldsymbol{h})$ pour $\boldsymbol{h}$ voisin de $\mathbf{0}$ est appelée* **différentielle de** f **en** M_0, *ou* **application linéaire tangente** *à f en M_0, et notée $\mathrm{d}f(M_0)$.*
10.4 ➞ *Si l'application f est différentiable en M_0, alors elle admet un* **développement limité à l'ordre** 1 *:*

$$f(M_0 + \boldsymbol{h}) = f(M_0) + \mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{h}) + o(\boldsymbol{h})$$

pour $\boldsymbol{h}$ voisin de $\mathbf{0}$.

11. L'image d'une droite par une application affine est elle aussi une droite. Une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui n'est pas affine transforme en général une droite en une courbe.



11.1 Étant donnés deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, on peut définir deux points B et C en posant

$$B = A + \boldsymbol{u} \quad \text{et} \quad C = A + \boldsymbol{v}.$$

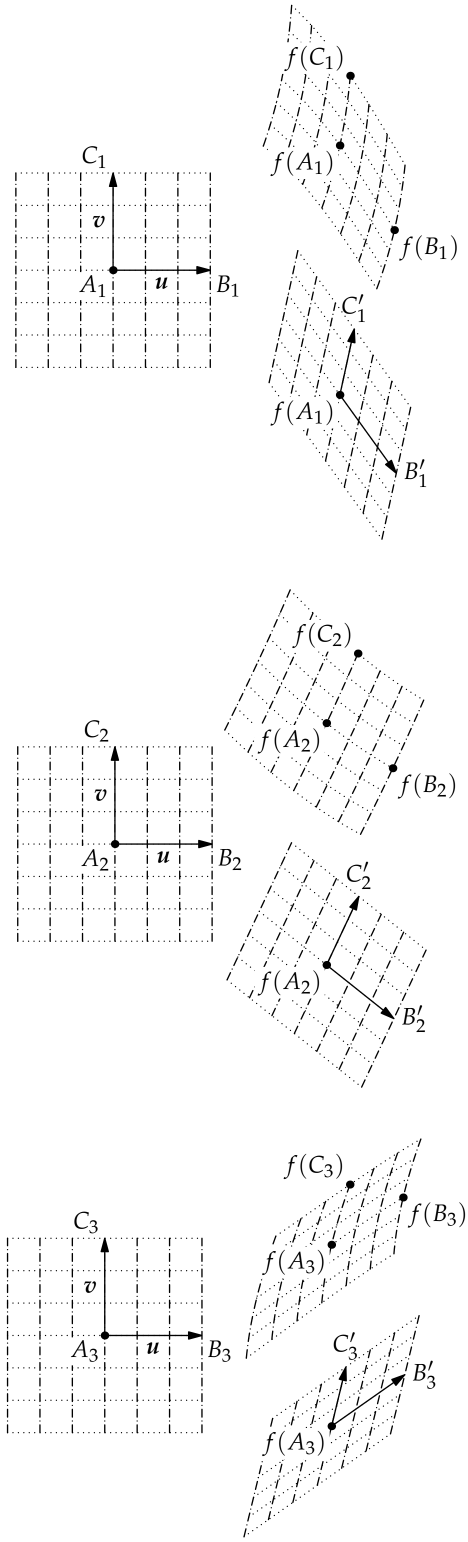
Le développement limité [10.4] de f nous assure alors que

$$B' = f(A) + \mathrm{d}f(A)(\boldsymbol{u}) \approx f(B)$$

et que

$$C' = f(A) + \mathrm{d}f(A)(\boldsymbol{v}) \approx f(C)$$

pourvu que les normes de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ soient assez petites pour que les points B et C soient assez proches de A.



11.2 On voit sur ces figures que la déformation d'un petit voisinage de A par une application différentiable f est assez proche de la déformation de ce voisinage par l'application linéaire $\mathrm{d}f(A)$, conformément à [10.4].
11.3 On voit aussi que l'image de la base $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ par les différentes applications linéaires tangentes n'est pas toujours la même : en général, l'application linéaire tangente $\mathrm{d}f(A)$ varie en fonction du point A. →[16]

12. Exemples

12.1 Si U est un intervalle ouvert de $E = \mathbb{R}$, alors la fonction f est différentiable en $M_0 \in U$ si, et seulement si, elle est dérivable en M_0 et

$$f'(M_0) = \mathrm{d}f(M_0)(1).$$

12.2 L'application $f = \big[M \mapsto \mathrm{tr}(M^2)\big]$ est différentiable en tout point $M_0 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\forall\, H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{d}f(M_0)(H) = 2\,\mathrm{tr}(M_0 H).$$

13. Différentiabilité et continuité

13.1 Si f est différentiable en M_0, alors

$$f(M_0 + \boldsymbol{h}) - f(M_0) = \mathcal{O}(\boldsymbol{h}).$$

13.2 ➞ *Si f est différentiable en M_0, alors f est continue en M_0.*

I.2 Différentielle

14. Différentiabilité globale

Soit U, un ouvert de E.

14.1 ✍ *La fonction $f : U \to F$ est* **différentiable (sur** U**)** *lorsqu'elle est différentiable en tout point $M_0 \in U$.*

14.2 ✍ *Si $f : U \to F$ est différentiable, la* **différentielle** *de f est la fonction*

$$\mathrm{d}f : U \to \mathrm{L}(E, F)$$

qui, à tout point M_0 de l'ouvert U, associe l'application linéaire tangente $\mathrm{d}f(M_0) : E \to F$.

Exemples fondamentaux

15. ➞ *Si $f : U \to F$ est constante, alors f est différentiable sur U et en tout point de U, l'application linéaire tangente à f est l'application nulle :*

$$\forall\, M_0 \in U, \quad \mathrm{d}f(M_0) = \omega = [\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{0}_F].$$

16. ➞ *Toute application linéaire $f \in \mathrm{L}(E, F)$ est différentiable sur E et en tout point de E, l'application linéaire tangente à f est égale à f :*

$$\forall\, M_0 \in E, \quad \mathrm{d}f(M_0) = f.$$

17. ➞ *Une application bilinéaire $f : V_1 \times V_2 \to F$ est différentiable sur $E = V_1 \times V_2$ et*

$$\mathrm{d}f(M_0) = \Big[(\boldsymbol{h}^1, \boldsymbol{h}^2) \mapsto f(\boldsymbol{h}^1, M_0^2) + f(M_0^1, \boldsymbol{h}^2)\Big]$$

pour tout $M_0 = (M_0^1, M_0^2) \in E$.

Opérations sur les fonctions différentiables

18. ➞ *Une combinaison linéaire de fonctions différentiables en M_0 est différentiable en M_0 et*

$$\mathrm{d}(\lambda f + g)(M_0) = \lambda\, \mathrm{d}(f)(M_0) + \mathrm{d}g(M_0).$$

19. ➞ *Si f est différentiable en M_0 et si $g : F \to G$ est linéaire, alors $g \circ f$ est différentiable en M_0 et*

$$\mathrm{d}(g \circ f)(M_0) = g \circ \big[\mathrm{d}f(M_0)\big].$$

20. ➞ *Une fonction à valeurs dans un espace produit*

$$f = \big[M \mapsto \big(f_1(M), \dots, f_n(M)\big)\big] : U \to F = F_1 \times \cdots \times F_n$$

est différentiable en M_0 si, et seulement si, toutes ses composantes f_k sont différentiables en M_0 et

$$\mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{h}) = \big(\mathrm{d}f_1(M_0)(\boldsymbol{h}), \dots, \mathrm{d}f_n(M_0)(\boldsymbol{h})\big).$$

21. Formule de Leibniz

21.1 ➞ *Si f et g sont deux applications différentiables en $M_0 \in U$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors le produit fg est différentiable en M_0 et*

$$\mathrm{d}(fg)(M_0) = g(M_0) \cdot \mathrm{d}f(M_0) + f(M_0) \cdot \mathrm{d}g(M_0).$$

21.2 ➞ *Soient $f_1, \dots, f_p$, des applications différentiables en $M_0 \in U$ à valeurs dans des espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ de dimension finie et*

$$\Phi : F_1 \times \cdots \times F_p \to G$$

une application p-linéaire. Alors l'application

$$g = \big[M \mapsto \Phi\big(f_1(M), \dots, f_p(M)\big)\big] : U \to G$$

est différentiable en M_0 et

$$\mathrm{d}g(M_0)(\boldsymbol{h}) = \sum_{k=1}^{p} \Phi\big(f_1(M_0), \dots, \mathrm{d}f_k(M_0)(\boldsymbol{h}), \dots, f_p(M_0)\big)$$

pour tout $\boldsymbol{h} \in E$.

22. Différentiation d'une composée

22.1 ➞ *Si $f : U \to F$ est différentiable en $M_0 \in U$, si $g : V \to G$ est différentiable en $P_0 = f(M_0) \in V$ et si $f_*(U) \subset V$, alors $(g \circ f)$ est différentiable en M_0 et*

$$\mathrm{d}(g \circ f)(M_0) = \mathrm{d}g(P_0) \circ \mathrm{d}f(M_0).$$

22.2 ➞ *Si $\gamma : I \to E$ est dérivable en $t_0 \in I$ et si $f : U \to F$ est différentiable en $M_0 = \gamma(t_0) \in U$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t_0 et*

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \mathrm{d}f(M_0)\big(\gamma'(t_0)\big).$$

22.3 En particulier, si $\gamma(t) = M_0 + t \cdot \boldsymbol{v}$, alors

$$(f \circ \gamma)'(0) = \mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{v}).$$

I.3 Dérivée selon un vecteur

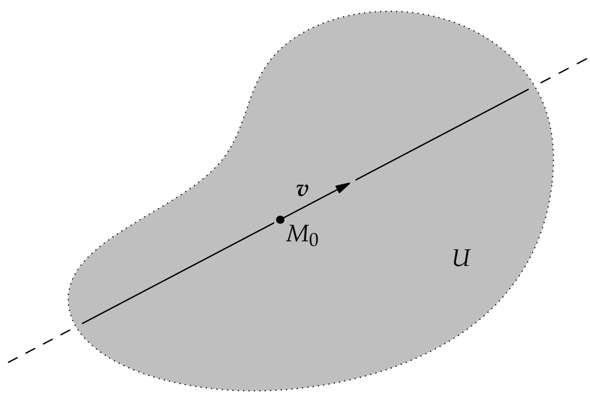
23. Pour étudier une fonction de plusieurs variables au voisinage d'un point M_0, il peut être utile de se ramener à l'étude de fonctions d'une seule variable réelle au voisinage de 0.

23.1 Soit $M_0 \in U$. Pour tout $\boldsymbol{v} \in E$, l'application

$$\varphi_{\boldsymbol{v}} = [t \mapsto f(M_0 + t \cdot \boldsymbol{v})]$$

est définie sur un voisinage de 0 et si f est différentiable en M_0, alors

$$f(M_0 + t \cdot \boldsymbol{v}) = f(M_0) + t \cdot \mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{v}) + o(t).$$



23.2 ✍ *Soient $M_0 \in U$ et $\boldsymbol{v} \in E$. L'application f admet une* **dérivée selon le vecteur** $\boldsymbol{v}$ *au point M_0 lorsque l'application*

$$\varphi_{\boldsymbol{v}} = [t \mapsto f(M_0 + t \cdot \boldsymbol{v})]$$

est dérivable en $t = 0$. On note alors

$$D_{\boldsymbol{v}} f(M_0) = (\varphi_{\boldsymbol{v}})'(0)$$

la dérivée de f selon $\boldsymbol{v}$ au point M_0.

23.3 Si $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_E$, alors $D_{\boldsymbol{v}} f(M_0) = \mathbf{0}_F$.

23.4

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad D_{\alpha \cdot \boldsymbol{v}} f(M_0) = \alpha \cdot D_{\boldsymbol{v}} f(M_0).$$

23.5 ➙ *Si f est différentiable en M_0, alors f admet une dérivée au point M_0 selon tout vecteur $\boldsymbol{v} \in E$ et*

$$D_{\boldsymbol{v}} f(M_0) = \mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{v}).$$

24. Exemples

24.1 La fonction définie par $f(0,0) = 0$ et par

$$\forall\, (x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = \frac{xy^3}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

admet une dérivée en $M_0 = (0,0)$ selon tout vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$.

24.2 La fonction définie par $f(0,0) = 0$ et par

$$\forall\, (x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

admet une dérivée en $M_0 = (0,0)$ selon tout vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$.

24.3 L'application définie par $f(0,0) = 0$ et par

$$\forall\, (x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = \frac{xy}{|x| + |y|}$$

admet une dérivée en M_0 selon les vecteurs $\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{e}_2$ de la base canonique.

I.4 Dérivées partielles

25. ✍ *Soit $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_p)$, une base de E.*
Si, pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$, une fonction $f : U \to F$ admet une dérivée selon $\boldsymbol{e}_j$ au point M_0, on dit qu'elle admet des **dérivées partielles de f relatives à la base $\mathscr{B}$**.
Les dérivées partielles de f sont notées $\partial_1 f, \dots, \partial_p f$ et définies par

$$\partial_j f(M_0) = D_{\boldsymbol{e}_j} f(M_0).$$

26. Les ***dérivées partielles secondes*** sont les dérivées partielles des dérivées partielles (si elles existent). On utilise la notation habituelle pour la composition des applications. Ainsi, $\partial_i \partial_j f$ désigne la i-ème dérivée partielle de la dérivée partielle $\partial_j f$.

27. Caractérisation des fonctions différentiables
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$, une base de E. On notera

$$\boldsymbol{h} = h_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 + \cdots + h_p \cdot \boldsymbol{e}_p,$$

la décomposition de tout vecteur $\boldsymbol{h} \in E$ dans cette base.

27.1 Si f est différentiable au point M_0, alors elle admet des dérivées partielles relatives à la base $\mathscr{B}$ au point M_0 et

$$\mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{h}) = D_{\boldsymbol{h}} f(M_0) = \sum_{j=1}^{p} h_j \cdot \partial_j f(M_0).$$

Par suite, pour $\boldsymbol{h}$ voisin de $\mathbf{0}_E$,

$$f(M_0 + \boldsymbol{h}) = f(M_0) + \sum_{j=1}^{p} h_j \cdot \partial_j f(M_0) + o(\boldsymbol{h}).$$

27.2 Si les dérivées partielles de f sont définies au point M_0 et si

$$f(M_0 + \boldsymbol{h}) - f(M_0) - \sum_{j=1}^{p} h_j \partial_j f(M_0) = o(\boldsymbol{h})$$

lorsque $\boldsymbol{h}$ est voisin de $\mathbf{0}_E$, alors f est différentiable en M_0.

28. Exemples

28.1 *Suite de* **[24.1]** – La fonction f est différentiable au point M_0 et l'application linéaire tangente $\mathrm{d}f(M_0)$ est l'application nulle.

28.2 *Suite de* **[24.2]** – La fonction f n'est pas différentiable au point $(0,0)$.

28.3 *Suite de* **[24.3]** – L'application f n'est pas différentiable en $M_0 = (0,0)$. Elle est différentiable en $M_1 = (1,0)$ avec

$$f(M_1 + \boldsymbol{h}) = (\, \boldsymbol{e}_2 \mid \boldsymbol{h} \,) + o(\boldsymbol{h})$$

pour $\boldsymbol{h}$ voisin de $\mathbf{0}$.

28.4 L'application $[\boldsymbol{u} \mapsto \|\boldsymbol{u}\|_\infty]$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas différentiable en $M_0 = (0,0)$.

Matrice jacobienne

29. Soit $f : U \to F$, une fonction différentiable. On choisit deux bases $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_p)$ et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ des espaces E et F respectivement.

29.1 ✍ *La* **matrice jacobienne (relative aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$)** *au point $M_0 \in U$ de l'application différentiable $f : U \to F$ est définie par*

$$\mathrm{Jac}(f)(M_0) = \mathfrak{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\big(\mathrm{d}f(M_0)\big).$$

29.2 Lecture en colonnes
La j-ème colonne de $\mathrm{Jac}(f)(M_0)$ est la matrice relative à la base $\mathscr{C}$ de la j-ème dérivée partielle $\partial_j f(M_0) \in F$ relative à $\mathscr{B}$.

29.3 Lecture en lignes
Les ***composantes*** de f relatives à la base $\mathscr{C}$ sont les applications $f^1, \dots, f^n$ de U dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall\, M \in U, \quad f(M) = \sum_{i=1}^{n} f^i(M) \cdot \varepsilon_i.$$

Comme $f : U \to F$ est différentiable, alors $f^i : U \to \mathbb{R}$ est différentiable et

$$\mathrm{d}(f^i)(M_0) \in \mathrm{L}(E, \mathbb{R}).$$

La i-ème ligne de la matrice jacobienne de f est la matrice jacobienne de la i-ème composante de f relative à la base $\mathscr{C}$.

30. ✍ *Si $E = F$ et $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, le* **jacobien** *de f en M_0 est le déterminant de l'application linéaire tangente $\mathrm{d}f(M_0)$.*

I.5 Gradient d'une fonction numérique

31. Points critiques
L'application linéaire tangente à $f : U \to \mathbb{R}$ en un point quelconque M_0 de U est une forme linéaire sur E.

31.1 ✍ *Le point $M_0 \in U$ est un* **point critique** *de f lorsque la forme linéaire tangente $\mathrm{d}f(M_0)$ est identiquement nulle.*

31.2 ➙ *Soient U, un ouvert de E et $f : U \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable.*
Le point $M_0 \in U$ est un point critique de f si, et seulement si, quelle que soit la base $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_p)$ de E, les dérivées partielles de f relatives à $\mathscr{B}$ sont nulles au point M_0 :

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant p, \quad \partial_j f(M_0) = 0.$$

32. On suppose que $f : U \to \mathbb{R}$ est une application différentiable et que l'espace E est un espace euclidien.

32.1 ✍ *Le* **gradient** *de f au point M_0 est le vecteur, noté $\nabla f(M_0)$ ou $\mathrm{grad}\, f(M_0)$, de E défini par* →**[5.66.3]**

$$\forall\, \boldsymbol{h} \in E, \quad \mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{h}) = \big(\, \nabla f(M_0) \,\big|\, \boldsymbol{h} \,\big).$$

32.2 Le développement limité [**23.1**] devient alors

$$f(M_0 + t \cdot \boldsymbol{v}) \underset{t \to 0}{=} f(M_0) + t \cdot \big(\nabla f(M_0) \,\big|\, \boldsymbol{v} \big) + o(t).$$

32.3 ➙ *Le point $M_0 \in U$ est un point critique de f si, et seulement si, le gradient de f au point M_0 est nul : $\nabla f(M_0) = \mathbf{0}_E$.*
32.4 ➙ *Si la base $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E, alors les coordonnées relatives à $\mathscr{B}$ du gradient $\nabla f(M_0)$ sont les dérivées partielles de f relatives à cette base :*

$$\partial_1 f(M_0),\ \ldots,\ \partial_p f(M_0).$$

I.6 Notation de Leibniz

33. Soit $f : U \to F$.
33.1 Ayant choisi une base $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ de E, on identifie souvent un point $M \in U$ à ses coordonnées relatives à $\mathscr{B}$.

$$\sum_{j=1}^{p} x_j \cdot \boldsymbol{e}_j \quad \longleftrightarrow \quad (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$$

33.2 De même, ayant choisi une base $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de F, on identifie la fonction $f : U \to F$ à une fonction de U dans $\mathbb{R}^n$.

$$\sum_{i=1}^{n} f^i(M) \cdot \varepsilon_i \quad \longleftrightarrow \quad \big(f^1(M), \ldots, f^n(M)\big)$$

33.3 Les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ étant fixées, on identifie donc l'application f à la famille $(f^1, \ldots, f^n)$ de ses composantes vues comme des ***fonctions de plusieurs variables***

$$f^i(x_1, \ldots, x_p)$$

définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
33.4 On utilise alors la ***notation de Leibniz*** pour écrire les dérivées partielles de f :

$$\partial_j(f^i)(M) = \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(M).$$

Avec cette notation, la dérivée [**27.1**] de f en M_0 selon le vecteur $\boldsymbol{h}$ s'écrit

$$\mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{h}) = D_{\boldsymbol{h}} f(M_0) = \sum_{j=1}^{p} h_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(M_0).$$

34. On considère ici une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$.
34.1 Si un point de $\mathbb{R}^3$ est représenté par (x, y, z), alors les dérivées partielles $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ et $\partial_3 f$ sont en pratique notées

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$$

ou plus simplement

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y} \ \text{ et } \ \frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{ou} \quad f'_x,\ f'_y \text{ et } f'_z \quad \text{voire} \quad f_x,\ f_y \text{ et } f_z$$

s'il n'y a aucun risque d'ambiguïté.
34.2 Comme f est une fonction à valeurs réelles, l'application linéaire tangente $\mathrm{d}f(M_0)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ et la matrice jacobienne au point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ s'écrit

$$\mathrm{Jac}(f)(M_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}.$$

34.3 Le développement limité au premier ordre [**10.4**] qui caractérise les fonctions différentiables devient

$$\begin{aligned} &f(x_0 + h_x, y_0 + h_y, z_0 + h_z) \\ &\quad = f(x_0,y_0,z_0) + \mathrm{Jac}(f)(x_0,y_0,z_0) \cdot \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} + o\big((h_x,h_y,h_z)\big) \\ &\quad = f(x_0,y_0,z_0) \\ &\qquad + h_x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + h_y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + h_z \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \\ &\qquad + o\big((h_x,h_y,h_z)\big). \end{aligned}$$

34.4 Les dérivées partielles secondes $\partial_1\partial_1 f$, $\partial_2\partial_1 f$... sont notées

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \ldots \quad \text{ou} \quad f''_{x^2},\ f''_{xy} \ldots \quad \text{voire} \quad f_{x^2},\ f_{xy} \ldots$$

35. On considère cette fois une application $f : U \to \mathbb{R}^2$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.
35.1 On identifie chaque point M de $\mathbb{R}^2$ à ses coordonnées (x, y) relatives à la base canonique et la fonction f à ses composantes $u, v : U \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \big(u(x,y),\ v(x,y)\big).$$

35.2 L'application f est différentiable au point $M_0 = (x_0, y_0)$ si, et seulement si, ses composantes u et v sont différentiables au point M_0 [**20**] et la matrice jacobienne de f s'écrit

$$\mathrm{Jac}(f)(M_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(M_0) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(M_0) \end{pmatrix}.$$

35.3 Si f est différentiable au point $M_0 = (x_0, y_0)$, son développement limité au premier ordre devient

$$f(x_0 + h_x, y_0 + h_y) = \begin{pmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \mathrm{Jac}(f)(M_0) \cdot \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} + o(\boldsymbol{h})$$

où $\boldsymbol{h} = (h_x, h_y)$ et $o(\boldsymbol{h})$ désigne une colonne

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_u(\boldsymbol{h}) \\ \varepsilon_v(\boldsymbol{h}) \end{pmatrix}$$

dont les composantes vérifient

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \mathbf{0}} \frac{\varepsilon_u(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = \lim_{\boldsymbol{h} \to \mathbf{0}} \frac{\varepsilon_v(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.$$

Entraînement

36. Questions pour réfléchir
1. Pourquoi ne peut-on étendre les notions de ***taux d'accroissement*** et de ***sens de variation*** aux fonctions de plusieurs variables ?
2. Si la fonction f est définie sur un ouvert U de l'espace affine E, alors son application linéaire tangente $\mathrm{d}f(M_0)$ est définie sur l'espace vectoriel E tout entier.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $f_k = [M \mapsto M^k]$ est différentiable en tout point $M_0 \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Si la fonction $f : U \to F$ est différentiable, alors elle est continue.
5. Comment est-il utile de généraliser la notion de ***fonction différentiable*** en dimension infinie ?

6. Si $f : I \to E$ est dérivable sur I, alors f est différentiable sur I et sa différentielle est l'application

$$\big[t_0 \mapsto [x \mapsto x \cdot f'(t_0)]\big].$$

7. *Suite de* **[15]** – Quelle est la différentielle d'une fonction constante ?
8. Si l'application $f : E \to F$ est linéaire, alors sa différentielle $\mathrm{d}f : E \to \mathrm{L}(E,F)$ est constante.
9. Soit $f : U \to F$, une fonction différentiable.
9.a L'application $\mathrm{d}f(M_0)$ peut-elle être constante ?
9.b L'application $\mathrm{d}f$ peut-elle être égale à f ? peut-elle être linéaire ?
10. Une application n-linéaire $f : V^n \to F$ est différentiable. Étudier le cas de $\det_{\mathscr{B}} : V^n \to \mathbb{R}$.
11. Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Quels que soient $M_0 \in U$ et $\boldsymbol{h} \in E$,

$$\big|\,\mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{h})\big| \leqslant \|\nabla f(M_0)\|\,\|\boldsymbol{h}\|.$$

12. Exprimer les coordonnées de $\nabla f(M_0)$ dans une base quelconque de E.

37. Soit $f : E \to F$, une application différentiable telle que

$$\forall\,(\lambda, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R} \times E, \quad f(\lambda \cdot \boldsymbol{x}) = \lambda \cdot f(\boldsymbol{x}).$$

Pour tout $\boldsymbol{x} \in E$,

$$f(\lambda \cdot \boldsymbol{x}) \underset{\lambda \to 0}{=} \lambda \cdot \mathrm{d}f(\boldsymbol{0}_E)(\boldsymbol{x}) + o(\lambda)$$

donc $f(\boldsymbol{x}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{0}_E)(\boldsymbol{x})$: l'application f est linéaire.

38. Calculer les dérivées partielles et les dérivées partielles secondes des expressions suivantes.

$$\begin{array}{lll} x^2y^2(x^2 - y^4) & x\cos y - ye^x & \ell\mathrm{n}(x^2 - y) \\ x^2 - 3xy + y - 1 & y\sin xy & x\sin(y - 3z) \end{array}$$

39. Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
39.1 On pose $g(x,y) = f(y,x)$. Relier les dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \quad \frac{\partial g}{\partial x}(y,x) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(y,x)$$

aux dérivées partielles de f.
39.2 Comparer les dérivées partielles f_x et f_y
1. lorsque f est symétrique :

$$\forall\,(x,y) \in U, \quad f(x,y) = f(y,x)$$

2. lorsque f est antisymétrique :

$$\forall\,(x,y) \in U, \quad f(x,y) = -f(y,x).$$

40. Différentiabilité d'une application affine
S'il existe une application linéaire $\varphi \in \mathrm{L}(E,F)$ telle que

$$\forall\,\boldsymbol{h} \in E, \quad f(M_0 + \boldsymbol{h}) = f(M_0) + \varphi(\boldsymbol{h}),$$

alors f est différentiable sur E et $\mathrm{d}f(M_0) = \varphi$ pour tout $M_0 \in E$.

41. Soit $f = \det : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Les applications partielles

$$\varphi_{i,j} = \Big[t \mapsto f(M_0 + tE_{i,j})\Big]$$

sont affines et la matrice

$$\big(D_{E_{i,j}} f(M_0)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

des dérivées partielles de f est égale à la comatrice de M_0.

II

Applications de classe $\mathscr{C}^k$

42. ✍ *L'application $f : U \to F$ est* **de classe $\mathscr{C}^1$** *(ou* **continûment différentiable***) lorsqu'elle est différentiable sur U et que l'application*

$$\mathrm{d}f = [M \mapsto \mathrm{d}f(M)] : U \to \mathrm{L}(E,F)$$

est continue sur U.

II.1 Théorème fondamental

43. Le théorème fondamental **[44]** permet de prouver qu'une application est continûment différentiable sans avoir à expliciter sa différentielle.

44. ➜ Théorème fondamental (admis)
Soient $\mathscr{B} = (\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_p)$, une base de E et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, une base de F. On note $f^1, \dots, f^n$, les composantes de $f : U \to F$ relatives à la base $\mathscr{C}$:

$$\forall\,M \in U, \quad f(M) = \sum_{i=1}^{n} f^i(M) \cdot \varepsilon_i.$$

Alors la fonction $f : U \to F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ si, et seulement si, pour chaque composante f^i de f, toutes les dérivées partielles

$$\partial_1(f^i), \ \dots, \ \partial_p(f^i)$$

relatives à $\mathscr{B}$ sont définies et continues sur U.

45. Exemples fondamentaux
45.1 Toute application linéaire de E dans F est de classe $\mathscr{C}^1$.
45.2 Toute application polynomiale de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et ses dérivées partielles sont aussi polynomiales.
45.3 Toute fonction rationnelle de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ouvert de définition et ses dérivées partielles sont aussi rationnelles.

46. Exemples
Pour le calcul des dérivées partielles, l'espace $E = \mathbb{R}^2$ est rapporté à sa base canonique.
46.1 *Suite de* **[24.3]** – La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le plan $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine $\{\boldsymbol{0}\}$.
46.2 La fonction f définie par $f(0,0) = 0$ et par

$$\forall\,(x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = \frac{x^4 y}{x^2 + y^2}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
46.3 L'application f définie par $f(0,0) = 0$ et par

$$\forall\,(x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = (x^2 - y^2)\,\ell\mathrm{n}(x^2 + y^2)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y,x).$$

46.4 La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0) = 0$ et par

$$\forall\,(x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

est différentiable au point $(0,0)$ sans être de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
46.5 L'application f définie sur $D = \,]-1,1[\, \times \,]-1,1[$ par

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + y^{2n}}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$.

46.6 Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, l'application g définie sur $U = [x \neq 0]$ par

$$g(x,y) = \frac{1}{x}\int_x^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t$$

peut être prolongée en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \int_1^y uf'(xu)\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f(xy)$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

46.7 La fonction f définie par $f(0,y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et par

$$f(x,y) = x^2 \cos\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

sur $[x \neq 0]$ est différentiable au point $(0,0)$ mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

II.2 Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

47. Une combinaison linéaire d'applications de classe $\mathscr{C}^1$ sur U est une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

48. Composition

48.1 Soient $f \in \mathscr{C}^1(U,F)$ et $g \in \mathscr{C}^1(V,G)$ avec $f_*(U) \subset V$. L'application

$$\big[M \mapsto \mathrm{d}g\big(f(M)\big) \circ \mathrm{d}f(M)\big]$$

est continue de U dans $\mathrm{L}(E,G)$.

48.2 ➟ *Soient U, un ouvert de E et V, un ouvert de F. On considère deux applications $f : U \to F$ et $g : V \to G$ de classe $\mathscr{C}^1$ et on suppose que $f_*(U) \subset V$.*
La composée $(g \circ f) : U \to G$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall\, M_0 \in U, \quad \mathrm{d}(g\circ f)(M_0) = \big[\,\mathrm{d}g\big(f(M_0)\big)\big] \circ \big[\,\mathrm{d}f(M_0)\big].$$

48.3 ➟ *Si $f : U \to F$ et $g : V \to G$ sont deux applications de classe $\mathscr{C}^1$ et si $f_*(U) \subset V$, alors*

$$\mathrm{Jac}(g\circ f)(M_0) = \mathrm{Jac}(g)\big(f(M_0)\big) \times \mathrm{Jac}(f)(M_0).$$

48.4 Si $g : F \to G$ est une application linéaire, alors

$$\forall\, M_0 \in F, \quad \mathrm{d}(g\circ f)(M_0) = g \circ [\,\mathrm{d}f(M_0)].$$

48.5 ➟ *Si $\gamma : I \to E$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$; si $f : U \to F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U et si $\gamma_*(I) \subset U$, alors alors $f \circ \gamma$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et*

$$\forall\, t_0 \in I, \quad (f\circ\gamma)'(t_0) = \mathrm{d}f(M_0)\big(\gamma'(t_0)\big)$$

où $M_0 = \gamma(t_0) \in U$.

48.6 Soient $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^1(I,F)$, où I est un intervalle ouvert qui contient $f_*(U)$. Alors $g \circ f \in \mathscr{C}^1(U,F)$ et

$$\mathrm{d}(g\circ f)(M_0)(\boldsymbol{h}) = \big[\,\mathrm{d}f(M_0)(\boldsymbol{h})\big] \cdot g'\big(f(M_0)\big)$$

quels que soient $M_0 \in U$ et $\boldsymbol{h} \in E$.

Formule de Leibniz

49. ➟ *Soient $f_1 : U \to F_1$ et $f_2 : U \to F_2$, deux applications de classe $\mathscr{C}^1$ et $\Phi : F_1 \times F_2 \to G$, une application bilinéaire.*
L'application $F : U \to G$ définie par

$$\forall\, M \in U, \quad F(M) = \Phi\big(f_1(M),\ f_2(M)\big)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\mathrm{d}F(M_0)(\boldsymbol{h}) = \Phi\big(\,\mathrm{d}f_1(M_0)(\boldsymbol{h}), f_2(M_0)\big) + \Phi\big(f_1(M_0),\ \mathrm{d}f_2(M_0)(\boldsymbol{h})\big)$$

pour tout $M_0 \in U$ et tout $\boldsymbol{h} \in E$.

50. Comme on l'a vu, la formule de Leibniz [**49**] s'étend aux "produits" Φ de p applications de classe $\mathscr{C}^1$. →[**21.2**]

II.3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, $k \geqslant 2$

51. ✍ **Classe $\mathscr{C}^2$**
L'application $f : U \to F$ est de **classe** $\mathscr{C}^2$ *lorsqu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et que ses dérivées partielles $\partial_1 f, \dots, \partial_p f$ sont de classe $\mathscr{C}^1$.*

52. Théorème de Schwarz et matrice hessienne
Lorsqu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^2$, l'ordre dans lequel est calculée une dérivée partielle seconde est indifférent.

52.1 ➟ *Si $f : U \to F$ est de classe $\mathscr{C}^2$, alors*

$$\forall\, i \neq j, \quad \partial_i\partial_j f(M) = \partial_j\partial_i f(M).$$

52.2 ✍ *Soit $f : U \to \mathbb{R}$, une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$.*
Pour tout point $M_0 \in U$, la **matrice hessienne** *de f en M_0 est définie par*

$$H_f(M_0) = \big(\partial_i\partial_j f(M_0)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

52.3 ➟ *Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert U, alors la matrice hessienne $H_f(M_0)$ est symétrique réelle en tout point M_0 de U.*

53. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et

$$\forall\, (x,y) \neq (0,0), \quad f(x,y) = \frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, mais pas de classe $\mathscr{C}^2$ car

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 = -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

54. *Suite de* [**46.7**] – Bien que la fonction f ne soit pas de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, les dérivées partielles $f''_{xy}(0,0)$ et $f''_{yx}(0,0)$ existent et sont égales.

55. ✍ *Le* **laplacien*** *d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ est défini par*

$$\Delta f(M) = \sum_{j=1}^{p} \partial_j\partial_j f(M).$$

Une fonction f est **harmonique*** *sur un ouvert U lorsque son laplacien est identiquement nul sur U.*

56. Pour tout $k \geqslant 3$, on définit la classe $\mathscr{C}^k(U,F)$ de manière récursive, comme on a défini $\mathscr{C}^2(U,F)$ à partir de $\mathscr{C}^1(U,F)$.

57. ✍ *L'application $f : U \to F$ est de* **classe** $\mathscr{C}^k$ *lorsqu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et que ses dérivées partielles $\partial_1 f, \dots, \partial_p f$ (relatives à une base quelconque de E) sont de classe $\mathscr{C}^{k-1}$.*

58. Si f est de classe $\mathscr{C}^k$, le Théorème de Schwarz [**52.1**] s'applique aux dérivées partielles d'ordre $2 \leqslant p \leqslant k$. →[**121**]

59. ✍ **Classe $\mathscr{C}^\infty$**
Une fonction appartient à la **classe** $\mathscr{C}^\infty(U,F)$ *lorsqu'elle est de classe $\mathscr{C}^k(U,F)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

60. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$
Les règles de calcul dans la classe $\mathscr{C}^2$, dans les classes $\mathscr{C}^k$ et dans la classe $\mathscr{C}^\infty$ sont les mêmes que dans la classe $\mathscr{C}^1$.

61. Exemples fondamentaux

61.1 Les applications linéaires sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.

61.2 Les applications polynomiales de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.

61.3 Une fonction rationnelle de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ est définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U.

II.4 Formule de Taylor-Young au second ordre

62. Contexte général
On considère ici une fonction numérique

$$f : U \to \mathbb{R}$$

définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

62.1 Comme $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes et il n'est en général pas nécessaire de préciser quelle norme on utilise pour mener les calculs.
62.2 Si on utilise un produit scalaire (par exemple, pour définir le gradient ou pour représenter la matrice hessienne par un endomorphisme auto-adjoint), la norme considérée sera bien entendu la norme associée au produit scalaire.
62.3 Dire que le vecteur $\boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_n)$ tend vers le vecteur nul $\mathbf{0}$ signifie que la norme $\|\boldsymbol{h}\|$ tend vers 0, c'est-à-dire que toutes les coordonnées h_i tendent vers 0 (toutes les normes sont équivalentes à la norme produit $\|\cdot\|_\infty$).
62.4 En dimension $n = 2$, il est souvent intéressant de calculer en coordonnées polaires :

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2+y^2},$$

ce qui revient à utiliser la norme euclidienne canonique :

$$(x,y) \to (0,0) \iff r \to 0.$$

63.1 ➙ **Formule de Taylor-Young**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$, une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert U.
Pour tout point $M_0 \in U$, lorsque l'accroissement $\boldsymbol{h}$ tend vers le vecteur nul $\mathbf{0}$,

$$\begin{aligned} f(M_0+\boldsymbol{h}) = f(M_0) &+ \mathrm{Jac}(f)(M_0)\cdot\boldsymbol{h} \\ &+ \frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{h}^\top.H_f(M_0).\boldsymbol{h} + o(\|\boldsymbol{h}\|^2). \end{aligned}$$

63.2 **Notations de Monge**
En dimension $n = 2$, on note traditionnellement

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0), \quad \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = H_f(M_0)$$

et le développement limité à l'ordre deux de f au voisinage du point $M_0 = (x_0, y_0)$ s'écrit

$$\begin{aligned} f(x_0+h_x, y_0+h_y) = f(M_0) &+ p\cdot h_x + q\cdot h_y \\ &+ \frac{1}{2}\big(r\cdot h_x^2 + 2s\cdot h_x h_y + t\cdot h_y^2\big) \\ &+ o(h_x^2+h_y^2). \end{aligned}$$

Entraînement

64. **Questions pour réfléchir**
1. Soient $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$; $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, deux bases de E.
1.a Les dérivées partielles de f relatives à $\mathscr{B}_2$ sont des combinaisons linéaires (à coefficients constants) des dérivées partielles de f relatives à $\mathscr{B}_1$.
1.b Les dérivées partielles de f relatives à $\mathscr{B}_1$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ si, et seulement si, les dérivées partielles de f relatives à $\mathscr{B}_2$ sont de classe $\mathscr{C}^1$.
Par conséquent, la définition [**51**] a bien un sens.
2. Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, deux bases de E et $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, deux bases de F. On note P, la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$ et Q, la matrice de passage de $\mathscr{C}_1$ à $\mathscr{C}_2$.

$$\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2}\big(\mathrm{d}f(M_0)\big) = Q^{-1}\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}\big(\mathrm{d}f(M_0)\big)P$$

3. L'ensemble des fonctions harmoniques [**55**] de U dans $\mathbb{R}$ est est un espace vectoriel.
4. Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, alors [**55**]

$$\Delta(fg) = \Delta f\cdot g + 2\,(\,\nabla f \mid \nabla g\,) + f\cdot\Delta g.$$

65. **Calculs de gradients** [**48.6**]
Soient f et g, deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs réelles.
1. $\nabla(fg)(M) = g(M)\cdot\nabla f(M) + f(M)\cdot\nabla g(M)$
2. $\nabla(e^f)(M) = \exp[f(M)]\cdot\nabla f(M)$
3. $\nabla(f^2)(M) = 2f(M)\cdot\nabla f(M)$
4. Si f est strictement positive sur U, alors

$$\nabla(\ell n\, f)(M) = \frac{1}{f(M)}\cdot\nabla f(M).$$

5. Si f ne s'annule pas sur U, alors

$$\nabla\Big(\frac{1}{f}\Big)(M) = \frac{-1}{f^2(M)}\cdot\nabla f(M).$$

66. Soit E, un espace euclidien.
1. La fonction f définie par

$$\forall\, \boldsymbol{x}\in E, \quad f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur E et $\nabla f(\boldsymbol{x}) = 2\cdot\boldsymbol{x}$ pour tout $\boldsymbol{x}\in E$.
2. Les fonctions définies par

$$g_1(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|, \quad g_2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} \quad \text{et} \quad g_3(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$$

sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $E\setminus\{\mathbf{0}_E\}$ et

$$\nabla g_1(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}, \quad \nabla g_2(\boldsymbol{x}) = -\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^3}, \quad \nabla g_3(\boldsymbol{x}) = -2\cdot\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^4}$$

pour tout $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}_E$. Les dérivées partielles des fonctions g_i ne sont pas définies en $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}_E$.
3. La fonction φ définie par

$$\forall\, \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}_E, \quad \varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $E\setminus\{\mathbf{0}_E\}$ et

$$\forall\, \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}_E,\ \forall\, \boldsymbol{h}\in E, \quad \mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\cdot\Big(\boldsymbol{h} - 2\frac{(\,\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{h}\,)}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\cdot\boldsymbol{x}\Big).$$

67. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, une application bilinéaire. Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}^n$, alors l'application h définie par

$$\forall\, t\in I, \quad h(t) = \varphi\big(f(t), g(t)\big)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall\, t\in I, \quad h'(t) = \varphi\big(f'(t), g(t)\big) + \varphi\big(f(t), g'(t)\big)$$

d'après [**12.1**].
68. **Mouvement circulaire uniforme**
L'arc paramétré $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ décrit un mouvement circulaire et uniforme : il existe deux constantes $r > 0$ et $v > 0$ telles que

$$\forall\, t\in I, \quad \big\|\gamma(t)\big\| = r \quad \text{et} \quad \big\|\gamma'(t)\big\| = v.$$

1. D'après [**67**], le vecteur vitesse $\gamma'(t)$ est orthogonal au vecteur position $\gamma(t)$ ainsi qu'au vecteur accélération $\gamma''(t)$, donc il existe un scalaire $k(t)$ tel que

$$\gamma''(t) = k(t)\cdot\gamma(t).$$

2. En dérivant la relation

$$\forall\, t\in I, \quad \big(\gamma(t)\,\big|\,\gamma'(t)\big) = 0,$$

on montre que l'accélération est centrale et de norme constante :

$$\forall\, t\in\ I, \quad \gamma''(t) = \frac{-v^2}{r}\cdot\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}.$$

69. Moment cinétique et couple
La position par rapport à l'origine d'une particule de masse m en mouvement dans $\mathbb{R}^3$ est décrite par un arc paramétré (I, γ) de classe $\mathscr{C}^2$. Le ***moment cinétique*** (par rapport à l'origine) est défini par

$$\forall\, t \in I, \quad L(t) = \gamma(t) \wedge [m\gamma'(t)].$$

1. La fonction $L : I \to \mathbb{R}^3$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée est égale à →**[67]**

$$T(t) = \gamma(t) \wedge [m\gamma''(t)].$$

2. Si la particule se déplace dans un champ de force central, alors $T(t) = \mathbf{0}$ pour tout $t \in I$ et la particule se déplace dans le plan (fixe) issu du point $\gamma(t_0)$ et normal au vecteur $L(t_0)$.

70. Champ de forces conservatif
Un ***champ de forces conservatif*** sur $\mathbb{R}^n$ est une application F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ pour laquelle il existe un ***potentiel*** $V \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad F(\boldsymbol{x}) = -\nabla V(\boldsymbol{x}).$$

Un arc paramétré $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^2$ est une ***particule semi-newtonienne*** lorsqu'il existe des réels $m_1, \dots, m_n$ tels que

$$\forall\, t \in I,\ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad F_i\big(\varphi(t)\big) = m_i \varphi_i''(t)$$

L'***énergie cinétique*** K et l'***énergie potentielle*** P de cette particule sont définies par

$$K(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \big[\varphi_i'(t)\big]^2 \quad \text{et} \quad P(t) = V\big(\varphi(t)\big).$$

Comme

$$P'(t) = \big(\, \nabla V[\varphi(t)] \,\big|\, \varphi'(t)\, \big),$$

la somme $K(t) + P(t)$ est indépendante de t : il y a ***conservation de l'énergie***.

III

Règle de la chaîne

71. La ***règle de la chaîne*** traduit les différentes versions de la formule de différentiation des fonctions composées **[48]** sous une forme générale et facile à mémoriser.

72. On considère une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et une fonction différentiable $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$, telle que $f_*(V) \subset U$.

72.1 D'après **[48.3]**,

$$\operatorname{Jac}(f \circ \varphi)(M) = \operatorname{Jac}(f)\big(\varphi(M)\big) \times \operatorname{Jac} \varphi(M)$$

pour tout $M \in U$.
Autrement dit, pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$,

$$\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial u_j}(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\varphi(M)\big) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(M).$$

72.2 L'abus de notation usuel consiste alors à considérer que les deux applications f et $g = f \circ \varphi$ représentent une même grandeur A :

1. La fonction f représente A comme une fonction des variables $x_1, \dots, x_n$.

$$A = f(x_1, \dots, x_n)$$

2. La fonction $f \circ \varphi$ représente A comme une fonction des variables $u_1, \dots, u_p$:

$$A = (f \circ \varphi)(u_1, \dots, u_p)$$

comme si, cette fois, les variables $x_1, \dots, x_n$ étaient des fonctions de $u_1, \dots, u_p$.

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad x_i = x_i(u_1, \dots, u_p).$$

72.3 Les coefficients de $\operatorname{Jac}(f \circ \varphi)(M) \in \mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ sont alors notés

$$\frac{\partial A}{\partial u_j} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{\partial A}{\partial u_j}(M),$$

ceux de $\operatorname{Jac}(f)[\varphi(M)] \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ sont notés

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{\partial A}{\partial x_i}[\varphi(M)]$$

et ceux de $\operatorname{Jac} \varphi(M) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont notés

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_j} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(M).$$

72.4 ➙ *De la sorte, la formule de dérivation des fonctions composées devient*

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant p, \quad \frac{\partial A}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u_j}.$$

72.5 La simplicité de cette formule repose sur le fait que x_i joue tantôt le rôle de variable (au dénominateur), tantôt le rôle de fonction (au numérateur).

72.6 Un paradoxe
On suppose que $w = x + y + z$ avec $z = x + y$. D'après la règle de la chaîne,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \\ &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}$$

et une interprétation erronée conduit à $\partial w/\partial z = 0$ alors que manifestement $\partial w/\partial z = 1$. Expliquer !

III.1 Calculs au premier ordre

73. Formules générales
Toutes les fonctions considérées ici sont supposées de classe $\mathscr{C}^1$.

73.1 Pour $g(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$,

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

et pour $g(t) = f\big(x(t), y(t), z(t)\big)$,

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

73.2 Pour $F(x) = f\big(x, y(x)\big)$,

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

et pour $F(x) = f\big(x, y(x), z(x)\big)$,

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.$$

73.3 Pour $F(x, y) = f\big(x, y, z(x, y)\big)$, →**[72.6]**

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}.$$

73.4 Pour $F(x) = f\big(x, y(x), z(x, y(x))\big)$,

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

73.5 Pour $F(s,t) = f\big(x(s,t), y(s,t)\big)$,

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} \quad\text{et}\quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}.$$

74. Applications

74.1 Dériver $g(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ avec :

$$f(x,y) = e^{x+y}, \qquad x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \sin t\,;$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad x(t) = e^t, \qquad y(t) = \ell n\, t.$$

74.2 Calculer les dérivées partielles de

$$F(x,y) = f\big(z(x,y)\big)$$

avec $f(z) = \sin z$ et $z(x,y) = 3x - 4y$.

74.3 Calculer les dérivées partielles de

$$F(x,y) = f\big(u(x,y),\, v(x,y)\big)$$

avec $f(u,v) = u - v$, $u(x,y) = x^2y$ et $v(x,y) = xy^2$.

III.2 Calculs au second ordre

75. Pour calculer une dérivée seconde, il suffit de savoir dériver la dérivée première !

75.1 Pour dériver la formule **[72.4]**, il faut savoir la lire : il s'agit d'une somme

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u_k \partial u_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right)$$

dont chaque terme est un produit (formule de Leibniz)

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right) = \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial A}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_i}{\partial u_j} + \frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_k \partial u_j}$$

où le premier facteur $\partial A/\partial x_i$ est une composée de deux fonctions différentiables (règle de la chaîne) →**[72.3]**

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{\partial A}{\partial x_i}\right) = \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial^2 A}{\partial x_\ell \partial x_i}\frac{\partial x_\ell}{\partial u_k}.$$

75.2 Les calculs deviennent longs et l'un des avantages considérables de la notation de Leibniz est de pouvoir contrôler facilement l'homogénéité du résultat.

76. Formules générales

Toutes les fonctions considérées ici sont de classe $\mathscr{C}^2$. →**[52.1]**

76.1 *Suite de* **[73.1]** – Pour $g(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$,

$$\frac{d^2 g}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

76.2 *Suite de* **[73.2]** – Pour $F(x) = f\big(x, y(x)\big)$,

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2}.$$

76.3 *Suite de* **[73.5]** – Pour $F(s,t) = f\big(x(s,t), y(s,t)\big)$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right).$$

Applications

77. On suppose que $g = g(u,v)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Calculer en fonction des dérivées partielles de g les dérivées partielles secondes de

$$f(x,y) = g\big(u(x,y), v(x,y)\big)$$

avec $(u,v) = (xy, 2x+3y)$, puis avec $(u,v) = (x^2y, 3x+2y)$.

78. On suppose que $g = g(u)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

78.1 Si $u = u(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, alors la fonction f définie par

$$f(x_1, \dots, x_n) = g\big(u(x_1, \dots, x_n)\big)$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ et →**[55]**

$$\Delta f = g''(u)\|\nabla u\|^2 + g'(u)\Delta u.$$

78.2 Fonctions harmoniques radiales

Sur $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, on pose →**[66]**

$$u(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

1.
$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \frac{1}{u} - \frac{x_k^2}{u^3}$$

2. La fonction f est harmonique sur Ω si, et seulement si,

$$\forall\, u > 0, \quad g''(u) + \frac{n-1}{u}\cdot g'(u) = 0$$

3. Si $n \geqslant 3$ et si f est une fonction harmonique radiale sur Ω, alors il existe deux constantes a et b telles que

$$\forall\, \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}, \quad f(\boldsymbol{x}) = \frac{a}{\|\boldsymbol{x}\|^{n-2}} + b.$$

78.3 On choisit maintenant

$$u(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{z^2}$$

sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

4.
$$\|\nabla u\|^2 = 4\frac{u+u^2}{z^2} \quad\text{et}\quad \Delta u = \frac{4+6u}{z^2}.$$

5. La fonction $f = g(u)$ est harmonique sur Ω si, et seulement si,

$$\forall\, u > 0, \quad 2(u+u^2)g''(u) + (3u+2)g'(u) = 0$$

c'est-à-dire s'il existe deux constantes K_1 et K_2 telles que

$$\forall\, u > 0, \quad g(u) = K_1 \operatorname{Arg\,th}\sqrt{1+u} + K_2.$$

79. Soit $f = f(x,y)$, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. La fonction g définie par

$$g(u,v) = f(u+v, uv)$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Si g est harmonique **[55]** sur $\mathbb{R}^2$, alors

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + (x^2 - 2y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

sur l'ouvert $\Omega = [x^2 - 4y > 0]$.

III.3 Changement de variables

80. Un ***changement de variables*** est une application continûment différentiable φ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ qui permet d'exprimer une fonction des variables $y_1, \ldots, y_n$:

$$A = g(y_1, \ldots, y_n)$$

comme une fonction des variables $x_1, \ldots, x_n$: →**[72.2]**

$$A = f(x_1, \ldots, x_n) = (g \circ \varphi)(x_1, \ldots, x_n)$$

mais aussi d'exprimer inversement une fonction des variables x_1, …, x_n :

$$A = f(x_1, \ldots, x_n)$$

comme une fonction des variables $y_1, \ldots, y_n$:

$$A = g(y_1, \ldots, y_n) = (f \circ \varphi^{-1})(y_1, \ldots, y_n).$$

80.1 ✍ *Une application est un* **changement de variables***, *ou* **difféomorphisme***, *lorsqu'elle réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ dont la bijection réciproque est aussi de classe $\mathscr{C}^1$.*

80.2 Tout automorphisme $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ est un difféomorphisme.

80.3 Si $\varphi : U \to V$ est un difféomorphisme, alors pour tout $M \in U$, l'application linéaire tangente $\mathrm{d}\varphi(M)$ est inversible et

$$\big[\mathrm{d}\varphi(M)\big]^{-1} = \mathrm{d}(\varphi^{-1})(N)$$

avec $N = \varphi(M) \in V$.

80.4 Si φ est un difféomorphisme et si $N = \varphi(M)$, alors les matrices jacobiennes

$$(\mathrm{Jac}\,\varphi)(M) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \quad \text{et} \quad (\mathrm{Jac}\,\varphi^{-1})(N) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

sont inversibles et inverse l'une de l'autre.

80.5 La règle de la chaîne s'écrit

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_k}$$

en fonction des variables $x_1, \ldots, x_n$ et

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \frac{\partial g}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial y_i}$$

en fonction des variables $y_1, \ldots, y_n$.

Changement de variables linéaire

81. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to F$.

81.1 L'automorphisme $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$, représenté dans la base canonique par la matrice inversible

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même, dont la réciproque est également linéaire et donc de classe $\mathscr{C}^1$.

81.2 La fonction $g : \mathbb{R}^2 \to F$ définie par

$$g(u,v) = (f \circ \varphi)(u,v) = f(au + bv,\ cu + dv)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

81.3 Calcul des dérivées partielles
Dans ce cas, en fonction des variables u et v,

$$\frac{\partial g}{\partial u} = a\frac{\partial f}{\partial x} + c\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial v} = b\frac{\partial f}{\partial x} + d\frac{\partial f}{\partial y}$$

et en fonction des variables x et y →**[80.4]**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{\Delta}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{c}{\Delta}\frac{\partial g}{\partial v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-b}{\Delta}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{a}{\Delta}\frac{\partial g}{\partial v}$$

où $\Delta = \det(\varphi) = ad - bc$.

81.4 Calcul des dérivées partielles secondes
La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et, d'après **[75.1]**,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2ac\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2bd\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + d^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = ab\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (ad + bc)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + cd\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

en fonction des variables u et v.
On obtient des formules analogues pour exprimer les dérivées partielles secondes de f en fonction des dérivées partielles secondes de g.

Coordonnées polaires

82.1 La ***base polaire*** est la base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\boldsymbol{u}_r = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad \boldsymbol{u}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta).$$

82.2 Contrairement à la base canonique $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$ dont les vecteurs sont fixes, les vecteurs de la base polaire varient en fonction du paramètre θ et

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_r}{\mathrm{d}\theta} = \boldsymbol{u}_\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\boldsymbol{u}_r.$$

82.3 D'après la formule de changement de base,

$$\boldsymbol{v} = v_x \cdot \boldsymbol{e}_x + v_y \cdot \boldsymbol{e}_y = v_r \cdot \boldsymbol{u}_r + v_\theta \cdot \boldsymbol{u}_\theta$$

si, et seulement si,

$$v_r = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta, \qquad v_\theta = -v_x\sin\theta + v_y\cos\theta$$

c'est-à-dire

$$v_x = v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta, \qquad v_y = v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta.$$

83. Les ***coordonnées polaires*** d'un point $M \in \mathbb{R}^2$ distinct de l'origine sont les réels $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$ tels que

$$\boldsymbol{OM} = r \cdot \boldsymbol{u}_r = (r\cos\theta) \cdot \boldsymbol{e}_x + (r\sin\theta) \cdot \boldsymbol{e}_y.$$

84. Principes généraux

84.1 Soit A, une grandeur scalaire dépendant de deux paramètres et représentée par une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$A = f(x,y)$$

1. Calculer le *laplacien de A en coordonnées polaires*, c'est exprimer la grandeur scalaire

$$\Delta A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

en fonction des dérivées partielles de la fonction g définie par

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

2. Calculer le *gradient de A en coordonnées polaires*, c'est décomposer la grandeur vectorielle

$$\nabla A = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \boldsymbol{e}_y$$

dans la base polaire $(\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_\theta)$ en exprimant ses coordonnées en fonction des dérivées partielles de la fonction g. →**[82.3]**

84.2 Si $\boldsymbol{A}$ est un champ de vecteurs dépendant de deux paramètres et représenté par une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\boldsymbol{A} = f(x,y) = f_x(x,y) \cdot \boldsymbol{e}_x + f_x(x,y) \cdot \boldsymbol{e}_y$$

calculer la *divergence de $\boldsymbol{A}$ en coordonnées polaires*, c'est exprimer la grandeur scalaire

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}$$

en fonction des coordonnées g_r et g_θ de la fonction g relatives à la base polaire $(\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_\theta)$: →**[82.3]**

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g_r(r,\theta) \cdot \boldsymbol{u}_r + g_\theta(r,\theta) \cdot \boldsymbol{u}_\theta.$$

85. Formulaire

L'application φ définie par

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de l'ouvert

$$U =]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$$

sur l'ouvert

$$V = \mathbb{R}^2 \setminus [x \leqslant 0] \cap [y = 0].$$

On peut démontrer que la bijection réciproque est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V, sans qu'il soit nécessaire d'expliciter cette bijection réciproque (*théorème d'inversion globale*).

85.1 Matrices jacobiennes [80.4]

En considérant x et y comme des fonctions de r et θ :

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

et en considérant $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et θ comme des fonctions de x et y :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{r^2} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2}.$$

85.2 Matrices hessiennes [75.1]

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0 & \dfrac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} = -r\cos\theta & \dfrac{\partial^2 x}{\partial r \partial \theta} = -\sin\theta \\
\dfrac{\partial^2 y}{\partial r^2} = 0 & \dfrac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = -r\sin\theta & \dfrac{\partial^2 y}{\partial r \partial \theta} = \cos\theta \\
\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \dfrac{r^2 - x^2}{r^3} & \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \dfrac{r^2 - y^2}{r^3} & \dfrac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} = \dfrac{-xy}{r^3} \\
\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \dfrac{2xy}{r^4} & \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = -\dfrac{2xy}{r^4} & \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = \dfrac{y^2 - x^2}{r^4}.
\end{array}$$

86. Résultats usuels [84]

$$\begin{aligned}
\Delta A &= \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} \\
\nabla A &= \frac{\partial g}{\partial r} \cdot \boldsymbol{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} \cdot \boldsymbol{u}_\theta \\
\operatorname{div} \boldsymbol{A} &= \frac{1}{r} g_r + \frac{\partial g_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial g_\theta}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

Coordonnées sphériques

87. Pour $0 \leqslant \theta\pi$ et $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, on considère la base orthonormée définie par

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_r &= \sin\theta\cos\varphi \cdot \boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\varphi \cdot \boldsymbol{e}_y + \cos\theta \cdot \boldsymbol{e}_z, \\
\boldsymbol{u}_\theta &= \cos\theta\cos\varphi \cdot \boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\varphi \cdot \boldsymbol{e}_y - \sin\theta \cdot \boldsymbol{e}_z, \\
\boldsymbol{u}_\varphi &= -\sin\varphi \cdot \boldsymbol{e}_x + \cos\varphi \cdot \boldsymbol{e}_y.
\end{aligned}$$

87.1 Les ***coordonnées sphériques*** d'un point $M \in \mathbb{R}^3$ distinct de l'origine sont les trois réels

$$r > 0, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

définis par

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{OM} &= r \cdot \boldsymbol{u}_r \\
&= (r\sin\theta\cos\varphi) \cdot \boldsymbol{e}_x + (r\sin\theta\sin\varphi) \cdot \boldsymbol{e}_y + (r\cos\theta) \cdot \boldsymbol{e}_z.
\end{aligned}$$

87.2 Les ***composantes sphériques*** d'un champ de vecteurs $A : U \to \mathbb{R}^3$ sont les trois fonctions A_r, A_θ et A_φ de U dans $\mathbb{R}^3$ définies par

$$\forall\, M \in U, \quad \boldsymbol{A}(M) = A_r(M) \cdot \boldsymbol{u}_r + A_\theta(M) \cdot \boldsymbol{u}_\theta + A_\varphi(M) \cdot \boldsymbol{u}_\varphi.$$

87.3 Calculer en coordonnées sphériques, c'est utiliser la fonction des variables r, θ et φ qui représente une grandeur scalaire :

$$A = g(r,\theta,\varphi)$$

ou les fonctions qui représentent en fonction des variables r, θ et φ les composantes sphériques d'un champ de vecteurs :

$$\boldsymbol{A} = g_r(r,\theta,\varphi) \cdot \boldsymbol{u}_r + g_\theta(r,\theta,\varphi) \cdot \boldsymbol{u}_\theta + g_\varphi(r,\theta,\varphi) \cdot \boldsymbol{u}_\varphi.$$

Dans ce dernier cas, comme pour les coordonnées polaires, les vecteurs $\boldsymbol{u}_r$, $\boldsymbol{u}_\theta$ et $\boldsymbol{u}_\varphi$ sont eux-mêmes des fonctions des variables θ et φ.

88. L'application ψ exprime les coordonnées (x,y,z) d'un point dans la base canonique en fonction des coordonnées sphériques r, θ et φ : →**[87.1]**

$$\psi(r,\varphi,\theta) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de l'ouvert

$$U =]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\times]-\pi/2, \pi/2[$$

sur l'ouvert

$$V = \mathbb{R}^3 \setminus [x \leqslant 0] \cap [y = 0].$$

88.1 Son jacobien est égal à $r^2\cos\theta$ et on peut démontrer que la bijection réciproque est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V (*théorème d'inversion globale*).

88.2 On peut donc considérer les trois coordonnées sphériques r, θ et φ comme des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert V des coordonnées cartésiennes x, y et z et en déduire les relations suivantes.

$$\frac{\partial (r^2)}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}$$

Entraînement

89. Questions pour réfléchir

1. Proposer une interprétation physique de la règle de la chaîne **[72.4]**.

2. Soit $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, considéré comme un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$. L'espace $\mathbb{R}^n$ étant rapporté à sa base canonique, comparer la matrice de φ, la matrice jacobienne de φ au point M et la matrice jacobienne de φ^{-1} au point $N = \varphi(M)$.

90. Calculer les dérivées partielles des fonctions définies par

$$f(x,y) = \int_x^y e^t \ln t \, dt \quad \text{et} \quad g(x,y,z) = \int_{2x}^{y^2} e^t \ln(tz) \, dt$$

dont on précisera l'ouvert de définition.

91. Soient φ et ψ, deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

91.1 La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x,y) = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$$

vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

91.2 La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $v(x,y) = \psi\big(x + \varphi(y)\big)$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

92. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

92.1 La fonction u définie par $u(x,y) = f(y/x)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

sur son ouvert de définition.

92.2 La fonction u définie par $u(x,y) = f(x^2+y^2)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

sur son ouvert de définition.

93. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+t, y+t) = f(x,y)$$

alors

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

94. Équation de la chaleur

Quelles que soient les constantes réelles a et k, les fonctions f_a et g définies par

$$f_a(x,t) = e^{-k^2a^2t} \sin ax \quad \text{et} \quad g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\frac{-x^2}{4k^2t}$$

vérifient l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

95. Équation des ondes en dimension 3

Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$, une constante. Quelle que soit la fonction g de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ privé de l'origine par

$$f(x,y,z) = \frac{1}{r} g(t - r/c) \quad \text{où} \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

est une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

96. La fonction F définie par $F(x,y) = \varphi(y/x)$, où φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, est de classe $\mathscr{C}^2$ sur le demi-plan ouvert $U = [x > 0]$ et →[55]

$$\Delta F(x,y) = \frac{2y}{x^3} \varphi'(y/x) + \frac{x^2+y^2}{x^4} \varphi''(y/x).$$

En particulier, la fonction F est harmonique sur U si, et seulement si, la fonction φ vérifie l'équation différentielle :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad (1+t^2)\varphi''(t) + 2t\varphi'(t) = 0$$

c'est-à-dire si $\varphi = [t \mapsto K_1 \operatorname{Arctan} t + K_2]$.

97. L'application φ définie sur $U = [x < y]$ par

$$\varphi(x,y) = \big(s(x,y), p(x,y)\big) = (x+y,\ xy)$$

est une bijection de classe $\mathscr{C}^\infty$ de U sur $V = [s^2 - 4p > 0]$.

1. Son jacobien est égal à $(x-y)$ et la bijection réciproque est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur V (*théorème d'inversion globale*).
2. Par inversion de la jacobienne de φ,

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{x}{x-y}, \quad \frac{\partial x}{\partial p} = \frac{1}{y-x}, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{y}{y-x}, \quad \frac{\partial y}{\partial p} = \frac{1}{x-y}$$

d'où en particulier

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = \frac{2xy}{(y-x)^3}.$$

Comparer avec la dérivée partielle seconde de $s - \sqrt{s^2-4p}$ par rapport à s.

98. Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, on pose

$$\varphi(x,y,z) = \big(X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z)\big) = \frac{k^2}{r^2} \cdot (x,y,z)$$

où $r^2 = x^2+y^2+z^2$.

1. L'application φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. Son jacobien est égal à $-k^6/r^6$.
2. En remarquant que

$$r^2 = \frac{k^4}{X^2+Y^2+Z^2},$$

on peut démontrer que φ réalise une bijection de U sur U, expliciter la bijection réciproque et en déduire que cette réciproque est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

3.

$$x\frac{\partial X}{\partial x} + y\frac{\partial X}{\partial y} + z\frac{\partial X}{\partial z} = -X \tag{1}$$

$$\Big(\frac{\partial X}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial X}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial X}{\partial z}\Big)^2 = \frac{k^4}{r^4} \tag{2}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial Y}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} = \frac{-2X}{r^2}. \tag{4}$$

99. Soit $v > 0$. La fonction définie par

$$u(x,t) = \alpha\big(1 - \operatorname{th}^2[\beta(x+vt)]\big)$$

est une solution sur $\mathbb{R}^2$, non constante, de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x}$$

si, et seulement si, $a = -v/2$ et $b = \sqrt{v}/2$.

100. Fonctions analytiques
Soit $\sum a_n z^n$, une série entière de rayon de convergence $R > 0$. L'application complexe f définie sur l'ouvert $U = [x^2 + y^2 < R^2]$ par

$$\forall\,(x,y) \in U, \quad f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+iy)^n$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ et harmonique sur U [**55**].

101. Un prolongement par continuité

1. Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ par

$$F(x,y) = \frac{f(x^2+y^2) - f(0)}{x^2+y^2}$$

tend vers $f'(0)$ au voisinage de $\mathbf{0}$.

2. Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, la fonction F peut être prolongée en une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Ce prolongement est-il de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

IV

Équations aux dérivées partielles

102. Une ***équation aux dérivées partielles*** (en abrégé : EDP) est une contrainte imposée à une fonction $f \in \mathscr{C}^k(\Omega,\mathbb{R})$: cette contrainte relie la fonction f à ses dérivées partielles.

103. Dans les équations étudiées, l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sur lequel la fonction f est définie est toujours un rectangle. →[**104.3**]

$$\Omega =]a,b[\times]c,d[\subset \mathbb{R}^2.$$

IV.1 Équations élémentaires

104. Équation du premier ordre

104.1 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Alors, pour tout $y_0 \in]c,d[$, l'application $[x \mapsto f(x,y_0)]$ est constante sur $]a,b[$.

104.2→ *Une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ vérifie l'équation*

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

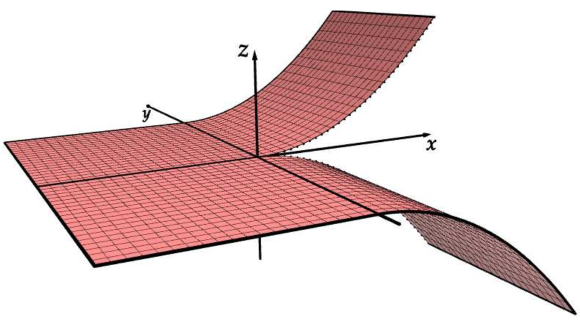
si, et seulement si, il existe $g \in \mathscr{C}^1(]c,d[\,,\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) = g(y).$$

104.3 Contre-exemple fondamental
Sur l'ouvert $\Omega = [y \neq 0] \cup [x < 0] \subset \mathbb{R}^2$, qui est connexe par arcs, il existe une application $f \in \mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

et dont la valeur dépend quand même de y. →[**103**]



105. Équation du second ordre [103]

105.1 On suppose que trois fonctions f, g et h sont reliées par

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) = xg(y) + h(y).$$

Si $f \in \mathscr{C}^2(\Omega)$, alors g et h sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c,d[$.

105.2→ *Une fonction $f \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ vérifie l'équation*

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$$

si, et seulement si, il existe g et h de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c,d[$ telles que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) = xg(y) + h(y).$$

105.3→ *Une fonction $f \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ vérifie l'équation*

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

si, et seulement si, il existe $g \in \mathscr{C}^2(]a,b[)$ et $h \in \mathscr{C}^2(]c,d[)$ telles que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) = g(x) + h(y).$$

106. *Suite de* [**103**] – Certaines EDP très simples sont des équations différentielles à peine déguisées.

106.1 Avec $0 < a < b$, une fonction $f \in \mathscr{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$ est solution de l'équation :

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f(x,y)$$

si, et seulement si, il existe une fonction $g \in \mathscr{C}^2(]c,d[)$ telle que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) = xg(y).$$

106.2 Une fonction $f \in \mathscr{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$ est solution de l'équation :

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \omega^2 f(x,y) = 0$$

(où $\omega > 0$) si, et seulement si, il existe deux fonctions g_1 et g_2, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]c,d[$ telles que

$$\forall\,(x,y) \in \Omega, \quad f(x,y) = g_1(y)\cos\omega x + g_2(y)\sin\omega x.$$

IV.2 Résolution par changement de variables

107. Un changement de variables bien choisi permet parfois de ramener une équation aux dérivées partielles à l'un des cas élémentaires précédents ou à une équation différentielle qu'on saura résoudre.

Changements de variables linéaires

108. Une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifie l'EDP

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

si, et seulement si, la fonction $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ définie par

$$g(u,v) = f(x,y) \quad \text{avec} \quad \{u = x - y, v = y\}$$

vérifie l'EDP élémentaire suivante : →[**104.2**]

$$\forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0.$$

109. Équation des ondes et principe de Huyghens
Soit $c > 0$.
109.1 Si g et h sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, alors la fonction f définie par

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,t) = g(x+ct) + h(x-ct)$$

vérifie l'***équation des ondes*** :

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0.$$

109.2 Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$, une solution de l'équation des ondes.
1. L'application définie par

$$\varphi(x,t) = (x+ct, x-ct)$$

est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction $F = f \circ \varphi^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Il existe deux fonctions g et h de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,t) = g(x+ct) + h(x-ct).$$

109.3 Si une corde horizontale dont les extrémités sont fixés est mise en vibration, l'expression $f(x,t)$ permet de représenter l'écart (vertical) à l'instant t du point d'abscisse x par rapport à sa position d'équilibre. Cette vibration paraît ici comme la superposition de deux ondes progressives de sens opposés.

110. Autres exemples
Les EDP linéaires à coefficients constants peuvent se ramener à une EDP élémentaire par un changement de variables linéaire bien choisi.
110.1 Résoudre les EDP suivantes en effectuant les changements de variables indiqués. →**[81]**

(1) $$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \{u = 2x+y,\ v = 3x+y\}$$

(2) $$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \{u = x+y,\ v = 2x+3y\}$$

(3) $$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f(x,y) \qquad \{u = x,\ v = y-x\}$$

(4) $$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = (x+y)^2 \qquad \{u = x+y,\ v = x-y\}$$

110.2 L'expression

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}$$

est le produit scalaire de ∇f avec un vecteur $\boldsymbol{n} = (a,b)$ de $\mathbb{R}^2$. Si $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ et si $f = g \circ \varphi$, alors

$$(\,\nabla f \,|\, \boldsymbol{n}\,) = (\,\nabla g \,|\, \varphi(\boldsymbol{n})\,)$$

et on peut choisir φ pour que l'EDP en g soit élémentaire.
110.3 Résoudre les EDP suivantes au moyen de changements de variables linéaires. →**[81]**

(5) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

(6) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

(7) $$2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Calculs en coordonnées polaires [85]

111. Une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$$

si, et seulement si, la fonction de classe $\mathscr{C}^1$

$$g :]0,+\infty[\times]0,\pi[\to \mathbb{R}$$

définie par

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

vérifie l'EDP suivante : →**[106.1]**

$$\forall\,(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,\pi[, \quad r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = g(r,\theta).$$

112. Soit $g = f \circ \varphi$.
112.1
1. Si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, alors la fonction $[\theta \mapsto g(r,\theta)]$ admet un prolongement 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $r > 0$.
2. Si f est continue sur $\mathbb{R}^2$, alors la fonction g une limite finie au voisinage de $\mathbf{0}$.

112.2 Fonctions radiales
La relation

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = r\frac{\partial g}{\partial r}$$

permet de résoudre les EDP suivantes.

(1) $$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

(2) $$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$$

(3) $$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

(4) $$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - f(x,y) = -(x^2+y^2)$$

(5) $$\Big(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\Big)f(x,y) = -(x^2+y^2)$$

Interpréter géométriquement la première équation.

112.3 Fonctions orthoradiales
La relation

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial \theta}$$

permet de résoudre les EDP suivantes.

(6) $$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

(7) $$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(8) $$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = f(x,y)$$

Interpréter géométriquement la première équation.

113. Fonctions harmoniques
Soit $f \in \mathscr{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ où $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.
113.1 Si f est une fonction radiale : $f(x,y) = g(r)$, alors la fonction f est harmonique **[55]** sur Ω si, et seulement si,

$$\forall\, r > 0, \quad g''(r) + \frac{1}{r}g'(r) = 0.$$

113.2 Si f est une fonction orthoradiale : $f(x,y) = g(\theta)$, alors la fonction f est harmonique sur Ω si, et seulement si,

$$\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{r^2}g''(\theta) = 0.$$

Calculs en coordonnées sphériques

114. Fonctions harmoniques [88]
Soient $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, $f \in \mathscr{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall\,(x,y,z) \in \Omega, \quad f(x,y,z) = g(r).$$

1.
$$\Delta f(x,y,z) = g''(r) + \frac{2}{r}g'(r).$$

2. La fonction f est un vecteur propre radial du laplacien si, et seulement si, il existe un réel λ tel que la fonction g soit une solution de l'équation différentielle

$$\forall\, r > 0, \quad g''(r) + \frac{2}{r}g'(r) - \lambda g(r) = 0.$$

Entraînement

115. L'application φ définie sur l'ouvert $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par

$$\varphi(u,v) = \Big(\frac{u^2+v^2}{2}, v\Big)$$

réalise une bijection de Δ sur l'ouvert $U = [y^2 < 2x]$. Cette bijection et sa réciproque sont de classe $\mathscr{C}^2$.
Une fonction $f \in \mathscr{C}^2(U, \mathbb{R})$ vérifie l'équation

$$(2x - y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x} - f = 0$$

si, et seulement si, il existe deux fonctions A et B de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$f(x,y) = A(y)\operatorname{ch}\sqrt{2x-y^2} + B(y)\operatorname{sh}\sqrt{2x-y^2}$$

pour tout $(x,y) \in U$.

116. L'application φ définie sur l'ouvert $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par

$$\varphi(x,y) = \Big(xy, \frac{x}{y}\Big)$$

réalise une bijection de U sur U. Elle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, comme sa bijection réciproque.

116.1 On utilise φ pour effectuer le changement de variables :

$$(u,v) = \varphi(x,y).$$

1. En inversant la jacobienne de φ, on obtient →**[80.4]**

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2y}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{y}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2x}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{-y^2}{2x}.$$

2. Soient f et g, deux fonctions définies sur U, telles que

$$\forall\,(x,y) \in U, \qquad f(x,y) = (g \circ \varphi)(x,y) = g(u,v).$$

2.a La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U si, et seulement si, g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

2.b
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2u\frac{\partial g}{\partial u}$$

2.c
$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2v\Big[2u\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{\partial g}{\partial v}\Big) - \frac{\partial g}{\partial v}\Big]$$

116.2 EDP du premier ordre
Résoudre les EDP suivantes.

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} \tag{1}$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2f(x,y) - 2 \tag{2}$$

116.3 EDP du second ordre
La résolution sur U de l'EDP

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$

se ramène à celle de l'équation différentielle

$$\forall\, t > 0, \quad 2tz'(t) - z(t) = 0.$$

117. Soit φ, l'application définie sur l'ouvert $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par

$$\varphi(x,y) = \Big(x, \frac{y}{x}\Big).$$

117.1 L'application φ est une bijection de U sur U. Elle est de classe $\mathscr{C}^1$, ainsi que sa bijection réciproque. De plus,

$$(\operatorname{Jac}\varphi)(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -y/x^2 & 1/x \end{pmatrix}, \ (\operatorname{Jac}\varphi^{-1})(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{pmatrix}.$$

117.2 Soient $f(x,y)$ et $g(u,v)$, deux fonctions de U dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$, telles que

$$\forall\,(x,y) \in U, \quad g(u,v) = (g \circ \varphi)(x,y) = f(x,y).$$

1. La fonction f est une solution de

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}$$

sur U si, et seulement si, il existe une fonction $h \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall\,(u,v) \in U, \quad g(u,v) = v\,\ell\mathrm{n}\,u + h(v).$$

2.a
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{1}{x^2}\Big[x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big]$$

2.b La fonction f est une solution de

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

sur l'ouvert U si, et seulement si, il existe deux applications a_1 et a_2 de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\,(u,v) \in U, \quad g(u,v) = a_1(v)u + a_2(v).$$

Questions, exercices & problèmes

Perfectionnement

118. Questions pour réfléchir

1. La propriété [**10.2**] subsiste-t-elle si l'ensemble de définition de f n'est pas un voisinage du point M_0 ?

2. L'application linéaire tangente au point M_0 s'écrit

$$\mathrm{d}f(M_0) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(M_0)\,\mathrm{d}x_j.$$

Quelle est la nature algébrique des expressions $\mathrm{d}x_j$? On a coutume d'interpréter physiquement $\mathrm{d}x_j$ comme une variation infinitésimale de la coordonnée x^j. Commenter.

3. Relier la formule de Leibniz qui exprime la dérivée de $f(\varphi(t), \psi(t))$ à la formule de différentiation des fonctions composées.

4. On suppose que, pour tout vecteur $\boldsymbol{v} \in E$, l'application f admet une dérivée selon le vecteur $\boldsymbol{v}$ en M_0. L'application f est-elle différentiable en M_0 ?

5. La base polaire $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ et cependant

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(M) \neq \mathrm{d}f(M)(\boldsymbol{e}_\theta).$$

6. L'application $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ si, et seulement si, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa différentielle $\mathrm{d}f : U \to E^*$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

7. Une application $f : E \to F$ est ***polynomiale*** lorsqu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ telles que les composantes de f relatives à la base $\mathscr{C}$ sont des fonctions polynomiales des coordonnées relatives à la base $\mathscr{B}$.

7.a La notion d'application polynomiale est indépendante des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ choisies.

7.b Si la fonction $f : E \to F$ est polynomiale, alors sa différentielle $\mathrm{d}f : E \to \mathrm{L}(E, F)$ est polynomiale.

Approfondissement

119. Si $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ est une application ***contractante*** :

$$\exists\, 0 < k < 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \big|g'(x)\big| \leqslant k$$

alors le jacobien de l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x,y) = \big(x + g(y), y + g(x)\big)$$

n'est jamais nul.

120. Fonctions harmoniques et propriété de la moyenne
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et g, la fonction définie sur l'ouvert $U =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ par

$$g(r,t) = f(r\cos t, r\sin t).$$

1. L'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(r) = \int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ et si

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0,$$

alors φ est constante.

2. Si la fonction f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$ [**55**], alors

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial g}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0,$$

l'expression $r\varphi'(r)$ est constante et la fonction φ est constante. Interpréter.

121.1 Il existe une bijection entre les listes $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ telles que

$$k_1 + \dots + k_n = p$$

et les familles $(K_1, \dots, K_n) \in \mathbb{N}^n$ telles que

$$1 \leqslant K_1 < \dots < K_n = p + n.$$

121.2 Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ possède *a priori* n^p dérivées partielles d'ordre k. Si elle est de classe $\mathscr{C}^p$, il suffit d'en calculer $\binom{p+n-1}{n-1}$ pour les connaître toutes.

Pour aller plus loin

122. Questions pour réfléchir

1. On suppose que f est différentiable en $M_0 \in U$.

1.a Définir le ***sous-espace affine tangent*** au graphe de f au point M_0.

1.b En donner une représentation paramétrique et en déduire sa dimension.

1.c Considérer le cas d'une fonction numérique $f : U \to \mathbb{R}$; le cas d'une fonction dérivable $f : I \to \mathbb{R}$.

2. Comment définir la différentielle seconde d'une application de classe $\mathscr{C}^2$?

123. Fonctions homogènes
Une fonction f, définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, est dite ***homogène de degré*** $\alpha \in \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall\, u \in U,\ \forall\, t > 0, \quad f(tu) = t^\alpha f(u).$$

1. Soit $f \in \mathscr{C}^1(U)$, une fonction homogène de degré α.

1.a Si $\alpha \geqslant 1$, alors les dérivées partielles f'_x et f'_y sont homogènes de degré $(\alpha - 1)$.

1.b Il existe une fonction $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ de période 2π telle que

$$\forall\,(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^\alpha g(\theta).$$

Condition pour que f admette un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$? de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

2. Soit $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$.

2.a Si f vérifie la relation

$$(\star) \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f,$$

alors, pour tout $(x,y) \in U$, la fonction définie par

$$\forall\, t > 0, \quad \varphi(t) = f(tx, ty)$$

est une solution de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$tx'(t) = \alpha x(t)$$

et la fonction f est homogène de degré α.

2.b Étudier la réciproque.

124. Développement limité de $\det$
Lorsque la matrice $H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tend vers la matrice nulle,

$$\det(I_n + H) = 1 + \operatorname{tr}(H) + o(H)$$

et, en notant C_M, la comatrice d'une matrice inversible M,

$$\det(M + H) = \det M + \operatorname{tr}(C_M^\top.H) + o(H).$$

On retrouve le résultat de [**41**] par densité.