Intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2)\,dt.$$

1. *Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.*
2. *Effectuer le changement de variable $u = t^2$.*
3. *Au moyen d'un changement de variable affine, éliminer l'entier n des bornes de l'intégrale.*
4. *En déduire la nature de la série $\sum I_n$.*

⋆

Tout d'abord, la fonction $f = \big[t \mapsto \sin(t^2)\big]$ est continue sur le segment $[\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}]$, donc elle est intégrable sur ce segment et l'intégrale I_n est donc bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

❧ Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|I_n| \leqslant \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \big|\sin(t^2)\big|\,dt$$

et

$$\forall\, t \in [\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}], \quad \big|\sin(t^2)\big| \leqslant 1,$$

donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |I_n| \leqslant \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi}.$$

Pour calculer un ordre de grandeur de $\sqrt{(n+1)\pi}$, on commence par **factoriser** : lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sqrt{(n+1)\pi} = \sqrt{n\pi}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{1/2} = \sqrt{n\pi}\Big(1 + \frac{1}{2n} + o(1/n)\Big).$$

On en déduit que

$$\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

ce qui prouve bien que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

❧ Il ne s'agit pas de poser $u = t^2$, mais de poser $t = \sqrt{u}$, ce qui n'est pas tout à fait la même chose.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $\varphi = \big[u \mapsto \sqrt{u}\big]$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[n\pi, (n+1)\pi]$ sur $[\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}]$ et comme la fonction f est intégrable sur $[\sqrt{n\pi}, \sqrt{(n+1)\pi}]$, on peut déduire du Théorème du changement de variable que la fonction

$$(f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \Big[u \mapsto \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\Big]$$

est intégrable sur le segment $[n\pi, (n+1)\pi]$. Cela n'a rien de remarquable : *toute* fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment.

En revanche, pour $n = 0$, l'application φ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0, \pi]$ sur $\big]0, \sqrt{\pi}\big]$ et la fonction $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ est intégrable sur l'intervalle $]0, \pi]$, ce qui est tout de même plus intéressant car, cette fois, le Théorème du changement de variable nous assure de la convergence d'une *intégrale généralisée* :

$$I_0 = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du.$$

Quoi qu'il en soit,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du.$$

❧ Le changement de variable affine $v = u - n\pi$ permet d'écrire I_n comme une intégrale sur l'intervalle $[0, \pi]$ pour tout $n \geqslant 1$.

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(v + n\pi)}{\sqrt{v + n\pi}}\,dv = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin v}{\sqrt{v + n\pi}}\,dv$$

Comme $\sin v$ est positif pour tout $v \in [0, \pi]$, on en déduit que l'intégrale I_n est du signe de $(-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, la série $\sum I_n$ est une série alternée.

❧ Pour tout $v \in [0, \pi]$ et pour tout $n \geqslant 1$, il est clair que

$$0 < \sqrt{v + n\pi} \leqslant \sqrt{v + (n+1)\pi}$$

et comme $\sin v \geqslant 0$ sur $[0, \pi]$, on en déduit que

$$0 \leqslant \frac{\sin v}{\sqrt{v + (n+1)\pi}} \leqslant \frac{\sin v}{\sqrt{v + n\pi}}.$$

Comme l'intégration avec bornes dans l'ordre croissant conserve les inégalités, on en déduit enfin que

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant |I_{n+1}| \leqslant |I_n|.$$

Cela prouve que les conditions d'application du Critère spécial des séries alternées sont remplies. La série $\sum I_n$ est donc convergente et sa somme est du signe de I_0, c'est-à-dire positive.