Intégrales

Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes.

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,dt \qquad\qquad \int_0^{+\infty} (t+2)-\sqrt{t^2+4t+1}\,dt$$

⋆

❧ La fonction

$$f = \left[t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\right]$$

est continue sur l'intervalle ouvert $]0,1[$.

Lorsque t tend vers 0, il est clair que $f(t) \sim \ln t$. Or $\ln$ est une fonction intégrable au voisinage droit de 0 (fonction de référence).

Lorsque t tend vers 1, on pose $t = 1-h$. D'après le Théorème du changement de variable AFFINE, la fonction f est intégrable au voisinage (gauche) de 1 si, et seulement si, la fonction $[h \mapsto f(1-h)]$ est intégrable au voisinage (droit) de 0. Or

$$f(1-h) = \frac{\ln(1-h)}{\sqrt{h^3}} \sim \frac{-h}{h^{3/2}} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{h}}\Big)$$

et la fonction $\left[h \mapsto h^{-1/2}\right]$ est intégrable au voisinage de $h = 0$ (fonction de référence), donc f est bien intégrable au voisinage de 1.

Ainsi, la fonction f est bien intégrable sur $]0,1[$ et l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}}\,dt$$

est (absolument) convergente.

❧ La fonction

$$g = (t+2)-\sqrt{t^2+4t+1}$$

est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}\sqrt{t^2+4t+1} &= t\sqrt{1+\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}}\\ &= t\left[1+\frac{1}{2}\Big(\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}\Big)-\frac{1}{8}\Big(\frac{16}{t^2}\Big)+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^3}\Big)\right]\\ &= (t+2)-\frac{3}{2t}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\end{aligned}$$

donc

$$g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{-3}{2t}$$

ce qui prouve que g n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

❧ L'équivalent trouvé montre que la fonction g tend vers 0 par valeurs inférieures au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, elle est de signe constant (négative !) au voisinage de $+\infty$ et comme elle n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} (t+2)-\sqrt{t^2+4t+1}\,dt$$

est divergente.

REMARQUE.— On aurait pu calculer le développement limité de manière plus siouX en réduisant le trinôme à la forme canonique. En effet,

$$\begin{aligned}\sqrt{t^2+4t+1} &= \sqrt{(t+2)^2-3}\\ &= (t+2)\sqrt{1-\frac{3}{(t+2)^2}}\\ &= (t+2)-\frac{3}{2(t+2)}+o\Big(\frac{1}{(t+2)}\Big)\end{aligned}$$

et on pouvait en déduire plus rapidement l'équivalent de $g(t)$ qui permettait de conclure.