Intégrales

1. Pour tout $x > 1$,

$$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-1}} \geqslant \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ell\mathrm{n}\, 2.$$

I
Convergence d'une intégrale impropre

2. L'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

est faussement impropre et l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

est divergente.

3. L'intégrale impropre

$$\int_n^{+\infty} e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

est divergente, quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$.

4. Discuter la convergence des intégrales

$$\int_0^1 t^k\,\ell\mathrm{n}\, t\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} t^k\,\ell\mathrm{n}\, t\,\mathrm{d}t$$

en fonction de l'entier $k \in \mathbb{N}$.

5. Convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \ell\mathrm{n}\, t.e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. Convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^\beta e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

en fonction des réels α et β.

7. Convergence des intégrales impropres suivantes.

1. $$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\ell\mathrm{n}\, t}\,\mathrm{d}t$$
2. $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$
3. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$
4. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$$

8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$. Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée. Quelle est la limite de F au voisinage de $+\infty$?

9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$. Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée. Quelle est la limite de F au voisinage de $-\infty$?

10. EM Lyon 2017
Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = e^x - e \cdot \ell\mathrm{n}\, x.$$

Les intégrales impropres

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$$

convergent, mais l'intégrale impropre

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

diverge.

II
Changements de variable

11. Lorsque x tend vers 0, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

tend vers $+\infty$.

12. Quels que soient $a < b$,

$$\int_a^b (t-a)(b-t)\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^3}{6}.$$

(Poser $t = (1-u)a + ub$.)

13. Pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(x-t)}}.$$

(Poser $t = ux$.)

14. Le changement de variable $u = {}^1/_t$ montre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ell\mathrm{n}\, t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

15. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t &= e^{-x} \int_0^{+\infty} (u+x)^k e^{-u}\,\mathrm{d}u \\ &= k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x}.\end{aligned}$$

16. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-u/2)}}\,\mathrm{d}u.$$

(Poser $u = 1+t$.)

17. Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Alors

$$f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

III

Intégration par parties

18.

$$\int_0^{+\infty} \ell\mathrm{n}\,\frac{1+t^2}{t^2}\,\mathrm{d}t = \pi$$

19. Quels que soient les entiers n et p,

$$\int_0^1 t^n\,\ell\mathrm{n}^p\,t\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}.$$

20. Quel que soit $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}.$$

Et si $x \leqslant 0$?

21. EM Lyon 2017
Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale impropre

$$H_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$$

converge. En intégrant par parties,

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad H_n = 2n(H_n - H_{n+1}).$$

22. Quels que soient l'entier $n \in \mathbb{N}$ et le réel $x > 0$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x^2}}{2x^{n+1}} - \frac{n+1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{n+2}}\,\mathrm{d}t.$$

23. Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\int_0^1 t^n \sin \pi t\,\mathrm{d}t \sim \frac{\pi}{n^2}.$$

24.

$$\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

25. Formule de Taylor
Soit g, une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. Quels que soient les réels z et u, l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_z^{z+u} (z+u-t)^2 g^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t$$

est égale à

$$\frac{-u^2}{2} g''(z) - ug'(z) + g(z+u) - g(u).$$

26. Pour $|x| < 1$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\,\ell\mathrm{n}(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

27. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$f(x) = \int_0^x \ell\mathrm{n}(1+t^2)\,\mathrm{d}t.$$

27.1 Sens de variation de f ? La fonction f est impaire.
27.2 En intégrant par parties,

$$f(x) = x\,\ell\mathrm{n}(1+x^2) - 2x + 2\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

(Indiquer la décomposition en éléments simples.)
27.3 Lorsque x tend vers $+\infty$,

$$f(x) \sim 2x\,\ell\mathrm{n}\,x.$$

IV

Intégrales fonctions d'un paramètre

28. Soit $\alpha > 1$. La suite de terme général

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$$

est décroissante et positive.

29. Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{e^t+1}.$$

29.1 Pour tout $t \in [0, x]$,

$$\frac{1}{e^x+1} \leqslant \frac{1}{e^t+1} \leqslant \frac{1}{2}$$

donc f tend vers $1/2$ au voisinage droit de 0.
29.2 Pour tout $t \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \frac{t}{e^t+1} \leqslant 1,$$

donc f tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

30. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \min(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Si $x \leqslant 0$, alors $F(x) = 0$.
2. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $F(x) = x^2/2 + 1 - x$.
3. Si $x \geqslant 1$, alors $F(x) = 1/2$.

31. Il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall\, x > 0, \quad 0 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \leqslant M.$$

32. On *admet* que

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

32.1 En posant $u = \sqrt{tx}$,

$$\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{u}}.$$

32.2 Avec le même changement de variable,

$$\int_0^1 e^{-tx}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}.$$

33. Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. La suite de terme général

$$u_n = \int_a^b f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t$$

tend vers 0. (Intégrer par parties.)

34. Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x+1/n}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\ell\mathrm{n}(n+1)}{e}$$

et

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+1/n}\,\mathrm{d}x \leqslant {}^1\!/_e.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+1/n}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

35. EM Lyon 2019 S
Pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\Phi(f)(0) = \frac{f(0)}{2} \quad \text{et} \quad \forall\, x \neq 0, \quad \Phi(f)(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

35.1 La fonction h définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h(x) - x^2\frac{f(0)}{2} = \int_0^x t\big[f(t) - f(0)\big]\,\mathrm{d}t$$

et que f est continue, alors $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

35.2 Si f est paire (resp. impaire), alors $\Phi(f)$ est impaire (resp. impaire).

35.3 Si f est positive sur $\mathbb{R}$, alors $\Phi(f)$ est positive sur $\mathbb{R}$.

35.4 L'application Φ est un endomorphisme de $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, mais elle n'est pas surjective.

35.5 Pour tout $x \neq 0$,

$$\big[\Phi(f)\big]'(x) = \frac{f(x) - 2\Phi(f)(x)}{x^2}.$$

2
Densités de probabilité

1. Lois usuelles

1.1 Loi uniforme

Si X suit la loi uniforme sur le segment $[a, b]$, alors

$$\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

1.2 Loi exponentielle

Si X suit la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$, alors

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

1.3 Loi normale

Si X suit la loi normale $\mathscr{N}(m, \sigma^2)$ de densité

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \frac{-1}{2}\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big)^2,$$

alors $\mathbf{E}(X) = m$ et $\mathbf{V}(X) = \sigma^2$.

1.4 Loi Gamma

Si X suit la loi $\Gamma(k, \theta)$ de densité

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = \frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} \cdot x^{k-1} e^{-x/\theta},$$

alors $\mathbf{E}(X) = k\theta$ et $\mathbf{V}(X) = k\theta^2$.

1.5 Loi Beta

Si X suit la loi $B(\alpha, \beta)$ de densité

$$\forall\, 0 < x < 1, \quad \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

avec

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

alors

$$\mathbf{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

1.6 Loi de Pareto

Si X suit la loi de Pareto de paramètres $x_m \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}_+^*$ de densité

$$\forall\, x \geqslant x_m, \quad f(x) = k \cdot \frac{x_m^k}{x^{k+1}},$$

alors

$$\forall\, k > 1, \quad \mathbf{E}(X) = \frac{kx_m}{k-1}$$

et

$$\forall\, k > 2, \quad \mathbf{V}(X) = kx_m^2(k-1)^2(k-2).$$

1.7 Loi du χ^2

Si X suit la loi du χ^2 à $k \in \mathbb{N}^*$ degrés de liberté de densité

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = \frac{x^{k/2-1}e^{-x/2}}{2^{k/2}\Gamma(k/2)},$$

alors $\mathbf{E}(X) = k$ et $\mathbf{V}(X) = 2k$. Il s'agit en fait de la loi $\Gamma(k/2, 2)$.

2. Soit $a > 0$. La différence de deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, a]$ admet pour densité la fonction g définie par

$$\forall\, x \in [-a, a], \quad g(x) = \frac{a - |x|}{a^2}.$$

3. EDHEC 2018

Pour tout $a > 0$ et tout $x \geqslant 0$, on pose

$$f(x) = \frac{x}{a} \exp\Big(\frac{-x^2}{2a}\Big).$$

3.1 La fonction f est une densité de probabilité sur $[0, +\infty[$. (Que dire lorsque $a < 0$?) Calculer la fonction de répartition.

3.2 Soit X, une variable aléatoire réelle admettant f pour densité.

1. La variable $Y = X^2$ suit une loi exponentielle. Calculer son paramètre.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Que vaut l'espérance de Y ? En déduire la variance de X.

4. EDHEC 2019 E

Pour $0 < \theta < 1/2$, on pose

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad f(x) = \frac{1}{\theta . x^{1+1/\theta}}.$$

1. La fonction f est une densité de probabilité sur $[1, +\infty[$.
2. On note X, une variable aléatoire admettant f pour densité.

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{1-\theta} \qquad \mathbf{V}(X) = \frac{\theta^2}{(1-\theta)^2(1-2\theta)}$$

3. Fonction de répartition :

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad F(x) = 1 - \frac{1}{x^{1/\theta}}.$$

La médiane de cette loi est la solution de l'équation $F(x) = 1/2$.

4. En vérifiant que

$$\forall\, x \in [0, 1/2], \quad 2^x(1-x) \leqslant 1,$$

on peut comparer la médiane et l'espérance.

5. La variable aléatoire $Y = \ell n\, X$ suit une loi exponentielle.

5. EDHEC 2017

Soit V, une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. On dit que la variable aléatoire

$$W = -\,\ell n\, V$$

suit la **loi de Gumbel**.

Calculer la fonction de répartition de V. En déduire la fonction de répartition de W. En déduire qu'une densité de W est donnée par

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = e^{-x} \exp(-e^{-x}).$$

6. La **loi de Cauchy** admet pour densité la fonction f définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

6.1 Vérifier que f est une densité de probabilité et que cette fonction est paire.

6.2 Que dire de l'espérance de cette loi ?

6.3 Établir la symétrie de la fonction de répartition :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) + F(-x) = 1.$$

7. Si X admet une densité continue f et un moment d'ordre deux, alors sa variance $\mathbf{V}(X)$ est strictement positive.

8. Exprimer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t$$

en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ (poser $u = \sqrt{n}$), puis au moyen de la fonction Γ (poser $u = nt^2$).

9. Soit U, une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1]$. La variable aléatoire $X = -\ell n\, U$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

10. Superposer sur une même figure les densités des lois exponentielles $\mathcal{E}(1)$ et $\mathcal{E}(10)$. Expliquer le tracé au moyen de la propriété

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = \lambda$$

commune aux lois exponentielles.

11. Soit U, un variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$. Calculer une densité de la variable aléatoire

$$X = \frac{1}{U}.$$

12. EDHEC 2021
Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = \frac{2}{x^3}\exp\Big(\frac{-1}{x^2}\Big).$$

La fonction f est-elle une densité sur $]0,+\infty[$? Quelle est la fonction de répartition associée ?

13. ESSEC 2022
Pour tout $x \in [0,1]$, on pose

$$h(x) = 140\int_0^x u^3(1-u^3)\,\mathrm{d}u.$$

La fonction h est une fonction de répartition. Tracer le graphe de h, ainsi que celui de h'.

14. EDHEC 2017
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $x < 0$, on pose $F_n(x) = 0$ et pour $x \geqslant 0$, on pose

$$F_n(x) = (1-e^{-x})^n.$$

14.1 La fonction F_n est une fonction de répartition, associée à la densité f_n, définie par

$$\forall\, x > 0, \quad f_n(x) = ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}.$$

On notera Y_n, une variable aléatoire réelle de densité f_n.

14.2 L'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} 1 - F_n(x)\,\mathrm{d}x$$

est convergente et

$$\lim_{x\to+\infty} x\big[1-F_n(x)\big] = 0.$$

En intégrant par parties et en passant ensuite à la limite, on en déduit que

$$\mathbf{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} 1 - F_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

14.3 Pour tout $A > 0$,

$$\int_0^A 1 - F_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{1-e^{-A}} \frac{1-u^n}{1-u}\,\mathrm{d}u.$$

(Poser $u = 1 - e^{-x}$.) En déduire que

$$\mathbf{E}(Y_n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}.$$

15. EDHEC 2019 S
Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x}.$$

La fonction f est une densité de probabilité sur $]0,+\infty[$. Calculer sa fonction de répartition F :

$$\forall\, x > 0, \qquad F(x) = \exp(-1/x).$$

Tracer le graphe de f et celui de F.

16. EDHEC 2019
Soient U et V, deux variables aléatoires indépendantes, de densités respectives f et g, de fonctions de répartition respectives F et G. On suppose que f et g sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$F(0) = G(0) = 0.$$

16.1 L'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} F(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

converge.

16.2 En **admettant** que

$$\int_0^{+\infty} F(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{P}(U \leqslant V),$$

démontrer que

$$\mathbf{P}(U \leqslant V) = \int_0^{+\infty} \big[1-F(t)\big]g(t)\,\mathrm{d}t.$$

16.3 Application numérique : on suppose que U suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ et que V suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\mu)$. Démontrer que

$$\mathbf{P}(U > V) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

17. ECRICOME 2020

17.1 Soit $a > 0$. Pour tout $t \geqslant a$, on pose

$$f(t) = \frac{3a^3}{t^4}.$$

La fonction f est une densité de probabilité, dite **densité de Pareto**. La fonction de répartition est égale à

$$\forall\, x \geqslant a, \quad F(x) = 1 - \frac{a^3}{x^3}.$$

L'espérance de cette loi est égale à $3a/2$ et sa variance à $3a^2/4$.

17.2 Soit U, une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1]$. La variable aléatoire

$$X = \frac{a}{U^{1/3}}$$

admet f pour densité et

$$\mathbf{P}(X > 2a) = \frac{1}{8}, \quad \mathbf{P}(X > 6a \mid X > 2a) = \frac{1}{27}.$$

18. EDHEC 2015
Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes, qui suivent la loi uniforme sur $[0,1[$. On pose

$$U = \min\{X, Y\}.$$

18.1 La fonction de répartition de U est donnée par

$$\forall\, 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad F(x) = 2x - x^2.$$

En déduire une densité de U et tracer le graphe de cette densité.
18.2 L'espérance de U est égale à $5/12$. Calculer $\mathbf{V}(U)$.

19. EM Lyon 2015
Soient U, une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0,1[$ et $\lambda > 0$. La variable aléatoire

$$X = \frac{-1}{\lambda}\,\ell\mathrm{n}(1-U)$$

suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

20. Pour tout $x \geqslant 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}.$$

1. Les fonctions f_n sont toutes des densités de probabilité.
2. Pour tout $x \geqslant 0$ et tout $n \geqslant 1$,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{-1}{n+1} f'_{n+1}(x).$$

3. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_0^{+\infty} x\big[f_{n+1}(x) - f_n(x)\big]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x.$$

21. EM Lyon 2016
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}.$$

21.1 La fonction f est une densité de probabilité. Calculer sa fonction de répartition.
21.2 Soit X, une variable aléatoire de densité f.
1. L'espérance de X est nulle.
2. Identifier la loi de la variable aléatoire

$$Y = \ell\mathrm{n}(1+e^X).$$

22. EM Lyon 2019 E
22.1 Soient U et V, deux variables aléatoires de densités respectives f_U et f_V. On suppose que ces densités sont nulles sur $]-\infty, 0[$ et continues sur $]0, +\infty[$. Les fonctions de répartition associées sont notées F_U et F_V.
Démontrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)\,\mathrm{d}t$$

est convergente.
22.2 Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi $\mathscr{E}(\lambda)$. On pose

$$M_n = \min(T_1, \dots, T_n)$$

et, si ce minimum est bien défini,

$$N = \min\{k \in \mathbb{N}^* \;:\; T_k \leqslant T_0\}.$$

(On pose $N = 0$ lorsque ce minimum n'est pas défini.)
1. Pour tout entier n,

$$[N > n] = [M_n > T_0].$$

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $t > 0$,

$$\mathbf{P}(M_n > t) = \big[\mathbf{P}(T_0 > t)\big]^n = (1-e^{-\lambda t})^n.$$

On en déduit une densité de M_n.

23. EM Lyon 2019 S
Pour tout $x > 0$, on pose

$$h_2(x) = 2xe^{-x^2}.$$

23.1 La fonction h_2 est une densité de probabilité.
Si la variable aléatoire X admet h_2 pour densité, alors

$$\mathbf{E}(X) = \sqrt{\pi}/2.$$

23.2 La fonction H_2 définie par

$$\forall\, x > 0, \quad H_2(x) = 1 - \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$$

est une fonction de répartition. Si la variable aléatoire Y admet H'_2 pour densité, alors Y est une variable aléatoire d'espérance finie.

24. ESSEC 2019 E
24.1 On considère une variable aléatoire U qui suit la loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$M_U(t) = \mathbf{E}(e^{tU}).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$M_U(t) = \frac{e^t - 1}{t}$$

et M_U est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
24.2 On suppose que Z suit la loi normale $\mathscr{N}(0,1)$. Démontrer que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{E}(e^{tZ}) = \exp(t^2/2).$$

25. ESSEC 2019 E II
Soit f, une densité de probabilité strictement positive, définie sur l'intervalle I. Si X est une variable aléatoire qui admet f pour densité, alors l'**entropie différentielle** de X est définie par

$$h(X) = -\int_I f(x)\frac{\ell\mathrm{n}\, f(x)}{\ell\mathrm{n}\, 2}\,\mathrm{d}x.$$

25.1 On pose $Y = c + X$. Densité de Y ? $h(Y)$ en fonction de $h(X)$?
25.2 On pose $Z = \alpha X$ avec $\alpha > 0$. Densité de Z ? $h(Z)$ en fonction de $h(X)$?
25.3 On suppose que X suit la loi uniforme sur le segment $[0, a]$. Alors

$$h(X) = \frac{\ell\mathrm{n}\, a}{\ell\mathrm{n}\, 2}.$$

Condition sur a pour que $h(X) > 0$?
25.4 On suppose que X suit la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0,1)$. Alors

$$h(X) = \frac{1}{2}\frac{\ell\mathrm{n}(2\pi e)}{\ell\mathrm{n}\, 2}.$$

25.5 On suppose que X suit la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$. Alors

$$h(X) = \frac{1-\ell\mathrm{n}\,\lambda}{\ell\mathrm{n}\, 2}.$$

26. ESCP 2019 T
26.1 La fonction définie par

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

est une densité de probabilité.

26.2 La fonction de répartition associée à f est

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad F(x) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

26.3 Si X est une variable aléatoire de densité f, alors

$$Y = \frac{X^2}{1+X^2}$$

suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

27. HEC 2020 BL

27.1 La fonction définie par

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(t) = \frac{1}{(1+t)\,\ell n\, 2}$$

est une densité de probabilité.

27.2 Si X est une variable aléatoire de densité f, alors

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1-\ell n\, 2}{\ell n\, 2}, \quad \mathbf{V}(X) = \frac{3\,\ell n\, 2 - 2}{2\,\ell n^2\, 2}, \quad \mathbf{E}(X^2) = \frac{2\,\ell n\, 2 - 1}{2\,\ell n\, 2}.$$

27.3 La fonction de répartition de X est donnée par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad F(x) = \frac{\ell n(1+x)}{\ell n\, 2}.$$

La médiane de X est donc $\sqrt{2}-1$.

28. BSB 2020 T

On considère la fonction définie par

$$\forall\, t \in [0,1], \quad f(t) = k \cdot \frac{t}{1+t}.$$

28.1 Il existe une variable aléatoire X dont la densité est f si, et seulement si,

$$k = \frac{1}{1-\ell n\, 2}.$$

28.2 La fonction de répartition de X est alors

$$\forall\, x \in [0,1], \quad F(x) = k\big[x - \ell n(1+x)\big].$$

28.3 L'espérance de X est égale à

$$\frac{\ell n\, 2 - 1/2}{1-\ell n\, 2}.$$

La variable aléatoire X admet-elle un moment d'ordre deux ?

29. EDHEC 2020 E

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathscr{N}(0,\sigma^2)$.

29.1 La fonction de répartition F_X de X vérifie :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F_X(-x) = 1 - F_X(x).$$

29.2 On pose $Y = |X|$. La fonction de répartition de Y vérifie :

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad F_Y(x) = 2F_X(x) - 1.$$

Calculer une densité de Y. On a aussi

$$\mathbf{E}(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma.$$

30. ESCP 2021 T

Soient $\lambda > 0$ et $0 < p < 1$. Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = \lambda(1-p)e^{-\lambda x} + \lambda^2 x p e^{-\lambda x}.$$

30.1 La fonction f est une densité de probabilité.

30.2 La fonction de répartition associée à f est donnée par

$$\forall\, x > 0, \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x} - \lambda p x e^{-\lambda x}.$$

30.3 Si X est une variable aléatoire qui admet f pour densité, alors X est d'espérance finie et

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1+p}{\lambda}.$$

31. BSB 2021 E

Pour tout $t \geqslant 0$, on pose

$$f(t) = e^{-t/2} - e^{-t}.$$

La fonction f est une densité de probabilité. La fonction de répartition qui lui est associée est donnée par

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad F(x) = 1 - 2e^{-x/2} + e^{-x}.$$

Une variable aléatoire X qui admet f pour densité est une variable aléatoire d'espérance finie et $\mathbf{E}(X) = 3$.

32. EDHEC 2021 S

Soient Z, une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et $Y = \exp(Z)$. Une densité de Y est donnée par

$$\forall\, x > 0, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\Big(\frac{-\ell n^2\, x}{2}\Big).$$

La variable aléatoire Y est une variable aléatoire d'espérance finie.