> *L'espace* $E = \mathbb{R}[X]$ *est muni du produit scalaire défini par*
>
> $$\forall\, P, Q \in E, \quad \langle\, P \,|\, Q \,\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$
>
> *Existe-t-il un polynôme* $A \in E$ *tel que*
>
> $$\forall\, P \in E, \quad P(0) = \langle\, P \,|\, A \,\rangle\,?$$

✍ *Si* V *est un espace* euclidien, *pour toute forme linéaire* $\varphi \in L(V, \mathbb{R})$, *il existe un, et un seul, vecteur* $a \in V$ *tel que*

$$\forall\, x \in V, \quad \varphi(x) = \langle\, a \,|\, x \,\rangle$$

(Théorème de représentation de Riesz).

❧ *Si* V *est un espace préhilbertien de dimension quelconque, d'après l'inégalité de Schwarz,*

$$\forall\, x \in V, \quad |\langle\, a \,|\, x \,\rangle| \leqslant \|a\| \cdot \|x\|,$$

donc la forme linéaire

$$[x \mapsto \langle\, a \,|\, x \,\rangle]$$

est continue, quel que soit le vecteur $a \in V$.

Le cas d'égalité de l'inégalité de Schwarz montre de plus que la norme subordonnée de cette forme linéaire est égale à $\|a\|$.

❧ *Le cours de Topologie montre que, sur un espace vectoriel de* dimension finie, *toute forme linéaire est continue.*

En revanche, si la dimension de V *est infinie, il existe des formes linéaires* non continues *et ces formes linéaires ne peuvent donc être représentées à l'aide du produit scalaire.*

❧ Pour tout $P \in E$, on pose

$$\varphi(P) = P(0).$$

Cette application φ est une forme linéaire sur E.

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = (1-X)^n$. On a donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_n(0) = 1.$$

Mais d'autre part

$$\|P_n\|^2 = \int_0^1 P_n^2(t)\,dt = \int_0^1 t^{2n}\,dt = \frac{1}{2n+1},$$

donc la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur nul de E.

On a trouvé une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|P_n - 0_E\| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \varphi(P_n) \neq \varphi(0_E).$$

La forme linéaire φ n'est donc pas continue sur E.

✍ ***Variante sans calculer d'intégrale***

Soit $A \in E$. *Avec* $P_n = X^n$, *on dispose d'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions continues (car polynomiales) sur le segment* $[0,1]$ *:*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in [0,1], \quad u_n(t) = (1-t)^n A(t).$$

Les fonctions u_n *sont donc intégrables sur* $[0,1]$.

Cette suite de fonctions converge simplement sur $]0,1]$ *vers la fonction nulle :*

$$\forall\, 0 < t \leqslant 1, \quad \lim_{n\to+\infty} u_n(t) = 0$$

et la fonction nulle est bien intégrable sur $]0,1]$.

De plus la convergence est dominée : il est clair que

$$\forall\, 0 < t \leqslant 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_n(t)\right| \leqslant \left|A(t)\right|$$

et le majorant est indépendant de $n \in \mathbb{N}$ *et intégrable sur* $[0,1[$ *(fonction continue sur le segment* $[0,1]$*).*

D'après le Théorème de convergence dominée, on a bien

$$\lim_{n \to +\infty} \langle\, P_n \,|\, A \,\rangle = 0$$

alors que $P_n(0) = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.