EXERCICE 1.— Vérifier et interpréter graphiquement les développements limités suivants au voisinage de 0.

$$\frac{\ell\mathrm{n}(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x^2+\mathcal{O}(x^3) \qquad \frac{\sin^2(2x)}{\sqrt{1+x^2}-1} = 8-\frac{26}{3}x^2+\mathcal{O}(x^4)$$

$$x\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}|x|-x^2+o(x^3) \qquad \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\mathcal{O}(x^3)$$

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}x^2+\mathcal{O}(x^3) \qquad \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\mathcal{O}(x^3)$$

$$\frac{\mathrm{Arctan}\,x}{x} = 1-\frac{1}{3}x^2+\mathcal{O}(x^3) \qquad \frac{1-\cos x}{x\sin x} = \frac{1}{2}+\frac{1}{24}x^2+\mathcal{O}(x^3)$$

$$\frac{x^2}{\exp x-1} = x-\frac{1}{2}x^2+\mathcal{O}(x^3) \qquad \frac{\ell\mathrm{n}(1+x^2)}{x} = x-\frac{1}{2}x^3+\mathcal{O}(x^4)$$

$$\frac{(1+x)^{1/3}-1}{x} = \frac{1}{3}-\frac{1}{9}x+\frac{5}{81}x^2+\mathcal{O}(x^3) \qquad \ell\mathrm{n}\cos x = -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+\mathcal{O}(x^5)$$

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)} = \frac{1}{2}-\frac{5}{8}x+\frac{11}{16}x^2+\mathcal{O}(x^3)$$

EXERCICE 2.— Vérifier et interpréter graphiquement les développements asymptotiques suivants au voisinage de $+\infty$.

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}+o({}^1\!/_{x^3}) \qquad \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{7}{x^4}+o({}^1\!/_{x^4})$$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2\,x^2}+\frac{1}{2\,x^3}+o({}^1\!/_{x^3}) \qquad \frac{\mathrm{Arctan}\,x}{x} = \frac{\pi}{2\,x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3\,x^4}+o({}^1\!/_{x^4})$$

EXERCICE 3.— Calculer un équivalent simple des expressions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\frac{x^2}{e^x-1} \qquad \ell\mathrm{n}(1+e^{-x}) \qquad \frac{\ell\mathrm{n}(1+x^2)}{x^{3/2}} \qquad \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)}$$