Soient f et g, deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I qui ne sont pas proportionnelles. Condition pour que f et g soient des solutions de l'équation différentielle suivante ?

$$\forall\, t \in I, \quad x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 \tag{1}$$

Analyse

❧ L'ensemble S_H des solutions de (1) est un plan vectoriel (théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire). Comme f et g ne sont pas proportionnelles, le couple (f, g) est une famille libre et si ces deux fonctions vérifient (1), alors le couple (f, g) est une base de l'espace S_H.

❧ Dans ces conditions, le wronskien défini par

$$\forall\, t \in I, \quad W(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix} \tag{2}$$

ne s'annule jamais :

$$\forall\, t \in I, \quad W(t) \neq 0$$

et vérifie une équation différentielle du premier ordre :

$$\forall\, t \in I, \quad W'(t) = -a(t)W(t). \tag{3}$$

Synthèse

Considérons deux fonctions f et g de classe $\mathscr{C}^2$ sur I dont le wronskien

$$\forall\, t \in I, \quad W(t) \overset{\text{déf.}}{=} f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$$

ne s'annule jamais :

$$\forall\, t \in I, \quad W(t) \neq 0.$$

Il est clair que W est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

❧ Du fait que le wronskien ne s'annule jamais sur l'intervalle I,

— la fonction a définie par

$$\forall\, t \in I, \quad a(t) = \frac{-W'(t)}{W(t)}$$

est continue sur I ;

— les fonctions f et g ne sont pas proportionnelles ;

— les fonctions f et g ne s'annulent pas en même temps :

$$\forall\, t \in I, \quad \big(f(t), g(t)\big) \neq (0, 0);$$

— les deux couples $\big(f(t), f'(t)\big)$ et $\big(g(t), g'(t)\big)$ sont toujours différents du couple $(0, 0)$;

— les zéros de f et g sont donc isolés : les équations $f(t) = 0$ et $g(t) = 0$ n'ont qu'un nombre fini de solutions sur chaque segment $[a, b] \subset I$.

Notons Z_f et Z_g, l'ensemble des zéros de f et de g.

$$\forall\, t \in I, \quad \begin{cases} t \in Z_f \iff f(t) = 0 \\ t \in Z_g \iff g(t) = 0 \end{cases}$$

On définit deux fonctions b_1 et b_2 en posant

$$\begin{cases} \forall\, t \in I \setminus Z_f, \quad b_1(t)f(t) = -f''(t) - a(t)f'(t); \\ \forall\, t \in I \setminus Z_g, \quad b_2(t)g(t) = -g''(t) - a(t)g'(t). \end{cases} \tag{4}$$

Les fonctions b_1 et b_2 sont continues sur $I \backslash Z_f$ et sur $I \backslash Z_g$ respectivement. Comme les points de Z_f et de Z_g sont isolés, ces deux fonctions admettent chacune au plus un prolongement continu sur l'intervalle I.

On déduit alors du système (4) que

$$\forall\, t \in I \setminus (Z_f \cup Z_g), \quad \big[b_1(t) - b_2(t)\big].f(t).g(t) = W'(t) + a(t)W(t)$$

puis de (3) que

$$\forall\, t \in I \setminus (Z_f \cup Z_g), \quad \big[b_1(t) - b_2(t)\big].f(t).g(t) = 0.$$

Pour $t \in I \setminus (Z_f \cup Z_g)$, le produit $f(t).g(t)$ n'est pas nul, donc

$$\forall\, t \in I \setminus (Z_f \cup Z_g), \quad b_1(t) = b_2(t).$$

Comme b_1 est continu sur $I \setminus Z_f$, que b_2 est continu sur $I \setminus Z_g$ et que $Z_f \cap Z_g = \varnothing$, il existe donc une, et une seule fonction b continue sur l'intervalle I telle que

$$\forall\, t \in I \setminus Z_f, \quad b(t) = b_1(t) \quad \text{et} \quad \forall\, t \in I \setminus Z_g, \quad b(t) = b_2(t).$$

On a ainsi défini deux fonctions continues a et b telles que f et g vérifient toutes les deux l'équation différentielle suivante.

$$\forall\, t \in I, \quad x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$$

Conclusion

Deux fonctions f et g de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle I vérifient une équation différentielle de la forme (1) si, et seulement si, leur wronskien W défini par (2) ne s'annule pas sur I.

NB : les fonctions a et b s'expriment explicitement au moyen des fonctions f et g ! Si les fonctions f et g sont bien choisies, les fonctions a et b ne sont pas trop compliquées...