Exercices complémentaires

Équation de Bézout

108. Calculer le pgcd de 1683 et 969. En déduire les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ qui vérifient les équations suivantes :

1. $969x - 1683y = 51$ (on vérifiera que $(7, 4)$ est une solution)
2. $969x - 1683y = 102$
3. $969x - 1683y = 84$

109. Déterminer les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$23x + 56y = 3.$$

110.1 On considère l'équation

$$13x - 7y = 1$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. En remarquant que $x + 1$ est divisible par 7, déterminer une solution particulière (x_0, y_0) avec $0 \leqslant x_0 \leqslant 7$. En déduire les autres solutions.

110.2 Résoudre l'équation $13x - 7y = 2$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

111. On considère deux entiers naturels a et b et on note $d = a \wedge b$. Déterminer le pgcd des entiers

$$a' = 13a + 5b \quad \text{et} \quad b' = 5a + 2b.$$

112. Soient n, un entier naturel non nul, et p, un entier premier (distinct de n). Déterminer les nombres complexes z qui vérifient les deux équations suivantes.

$$z^n + 1 = 0 \qquad z^p + 1 = 0$$

On fera intervenir le pgcd $d = n \wedge p$.

Calculs algébriques dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

113. Étudier, suivant la valeur de l'entier n, le reste de la division euclidienne par 6 de l'entier 5^n. Pour quelles valeurs de n le nombre $A_n = 5^n + 5n + 1$ est-il divisible par 6 ?

114. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste modulo 7 de 5^n. En déduire le reste modulo 7 de 1972^{57} et les entiers n pour lesquels 1972^n est congru à 4 modulo 4.

115. Déterminer le reste de 8^{1974} modulo 5.

116. Pour tout entier naturel n, l'entier

$$u_n = 3^{n+3} - 4^{4n+2}$$

est divisible par 11.

117. Déterminer les entiers naturels n tels que

$$5^{2n} + 5^n \equiv 0 \pmod{13}.$$

118. Déterminer les restes modulo 13 des entiers 5^k pour tout entier $0 \leqslant k < 5$. En déduire que l'entier

$$u_n = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$$

est divisible par 13 pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

119. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier n^2 est congru à 0, à 1 ou à 4 modulo 8. En déduire les entiers relatifs x tels que

$$(5x + 3)^2 - 1 = 0 \pmod{8}.$$

120. Résoudre l'équation $x^2 + x + 6 = 0$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

121. Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ x + 5y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

122. Dresser la table de multiplication de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

dans $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$.

123. Dresser la table de multiplication de l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. En déduire les solutions de l'équation $2x = 0$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et résoudre le système suivant dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 5x + 3y = 3 \end{cases}$$

124. Dresser la table de multiplication de l'anneau $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. En déduire les solutions des équations

$$3x + 4 = 0 \qquad 2x + 1 = 0$$

dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, puis résoudre le système suivant dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

Démontrer que l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

125. Résoudre l'équation

$$x^3 = x$$

dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, puis dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

126. On considère l'équation

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

126.1 Résoudre l'équation dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

126.2 Déterminer les diviseurs de zéro dans $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$. En déduire les solutions de l'équation dans $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.

127. Résoudre l'équation

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. En déduire les entiers relatifs n tels que le reste de la division euclidienne de $n^2 - 3n$ par 5 soit égal à 3.

128. Déterminer les entiers relatifs n tels que

$$n^3 + 1 = 0 \pmod{7}$$

puis les entiers relatifs n tels que

$$n^3 - 1 = 0 \pmod{7}.$$

Quel que soit l'entier relatif n, l'entier

$$u_n = n(n^3 + 1)(n^3 - 1)$$

est divisible par 42.

129. On pose ici $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et on considère l'équation

$$x^2 + px + q = 0$$

où les coefficients p et q ainsi que l'inconnue x appartiennent au corps $\mathbb{K}$.
Déterminer successivement les couples $(p,q) \in \mathbb{K}^2$ tels que l'équation étudiée admette

— la solution 0 ;
— la solution 1 ;
— la solution 2.

Pour quels couples (p,q) cette équation n'admet-elle aucune solution ?

130. Soit $n \geqslant 3$, un nombre premier. On dit que $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un ***carré parfait*** lorsqu'il existe un élément b non nul de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $a = b^2$.

130.1 L'équation $x^2 = 0$ admet une, et une seule, solution dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si a est un carré parfait, alors l'équation $x^2 = a$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

130.2 On considère l'équation

$$(\star) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

dont les coefficients a, b, c et l'inconnue x appartiennent à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On suppose que a n'est pas nul.

1. L'équation $2ap = b$ admet une, et une seule, solution $p \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. L'équation $(\star)$ admet deux solutions dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si, et seulement si, $ap^2 - c$ est un carré parfait. Que dire de l'équation $(\star)$ lorsque $ap^2 - c = 0$?

130.3 On suppose ici que $n = 7$ et on considère l'équation

$$5x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Quels sont les carrés parfaits de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$? En déduire les solutions de l'équation.

Lemme chinois des restes

131. Soient a et b, deux entiers naturels donnés. On cherche les entiers $x \in \mathbb{Z}$ qui vérifient le système suivant.

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod 9 \\ x \equiv b \pmod{11} \end{cases}$$

Vérifier que toutes les solutions sont congrues à un même entier x_0 modulo 99. En déduire l'ensemble des solutions du système.

132. On considère l'ensemble E des entiers relatifs x qui vérifient simultanément les relations suivantes.

$$x \equiv 2 \pmod 3 \qquad x \equiv 2 \pmod 5$$
$$x \equiv 2 \pmod 7 \qquad x \equiv 2 \pmod 9$$

Donner la forme générale des éléments de E. Déterminer les éléments de E qui sont compris (au sens large) entre -1000 et -500. Quel est le pgcd de deux éléments consécutifs de E ?

133. On note S, l'ensemble des entiers relatifs x tels que

$$x \equiv 1 \pmod 3 \quad \text{et} \quad x \equiv 2 \pmod 5.$$

Déterminer un entier $x \in S$ compris entre 0 et 10. Démontrer que

$$\forall\, (a,b) \in S \times S, \quad a \equiv ab \pmod{15}.$$

Déterminer les éléments de S.

134. Résoudre le système suivant d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod 4 \\ 2x \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$$

Factorisation, ppcm, pgcd

135. Déterminer les couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$x^2 - 4y^2 = 36.$$

136. Déterminer les entiers naturels impairs n tels que la fraction

$$\frac{n^3 - n}{n+2}$$

soit réductible.

137. Soit $1 \leqslant a \leqslant 100$, un entier naturel. On suppose que les entiers (a, b, c, d, e) forment une progression géométrique de raison entière $q \geqslant 2$. Si

$$6a^2 = e - b,$$

alors $q = 3$ et $a = 13$.

138. Déterminer les entiers naturels a et b dont le pgcd d et le ppcm m vérifient la relation suivante.

$$m - 2d = 22$$

139. Déterminer les entiers naturels a et b dont le pgcd d et le ppcm m vérifient la relation suivante.

$$m - d = 77$$

140. Soit N, un entier naturel dont la décomposition en facteurs premiers est

$$N = a^\alpha b^\beta c^\gamma$$

où les valuations α, β et γ sont strictement positives.

140.1 On note $\sigma(N)$, la somme des diviseurs de N. Démontrer que

$$\sigma(N) = \sum_{k=0}^{\alpha} a^k \sum_{k=0}^{\beta} b^k \sum_{k=0}^{\gamma} c^k.$$

Que vaut $\sigma(175)$?

140.2 L'entier N est dit ***parfait*** lorsque $\sigma(N) = 2N$. Si l'entier $2^n - 1$ est premier, alors l'entier

$$N = 2^{n-1}(2^n - 1)$$

est parfait.

141.1 L'entier $2^{11} - 1$ est-il premier ?

141.2 Soient p et q, deux entiers naturels non nuls. Quel est le reste de la division euclidienne de $2^{pq} = (2^p)^q$ par $2^p - 1$? En déduire que $2^{pq} - 1$ est divisible par $(2^p - 1)$ et par $(2^q - 1)$.

141.3 Si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier. La réciproque est fausse.

142. Soient a et b, deux nombres premiers distincts. On note E, l'ensemble des entiers naturels qui n'ont pas d'autre diviseur premier que a et b.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad n \in E \iff \exists\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2, \quad n = a^\alpha b^\beta.$$

142.1 Soit $n = a^\alpha b^\beta \in E$. Le nombre $\sigma(n)$ de diviseurs de n est égal à $(\alpha+1)(\beta+1)$.

142.2 Soient x et y dans E. On suppose que $\sigma(x) = 21$ et que $\sigma(y) = 10$.

1. Quelles sont les décompositions primaires possibles de x et de y ?
2. On suppose de plus que $x \wedge y = 10$. Déterminer x et y, ainsi que a et b.

143.1 Déterminer les entiers relatifs a, b, c et d tels que

$$X^3 + aX^2 + 4x + 8 = (X+b)(X^2 + cX + d).$$

143.2 Soit $p \geqslant 2$, un nombre premier. Déterminer en fonction de p les entiers relatifs a, b, c et d tels que

$$X^3 + aX^2 + 4x + p = (X + b)(X^2 + cX + d).$$

144.1 Soient x et y, deux entiers naturels non nuls, premiers entre eux. Démontrer que les deux entiers $x + y$ et xy sont de parités différentes.
144.2 Donner la liste (croissante) des diviseurs positifs de 84.
144.3 Déterminer les entiers naturels a et b tels que

$$a + b = 84 \qquad \text{et} \qquad M = \Delta^2$$

où $M = a \vee b$ et $\Delta = a \wedge b$. (On posera $a = \Delta\alpha$ et $b = \Delta\beta$.)

145. On note E, l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels il existe trois entiers naturels premiers $a < b < c$ dont l'un est la somme des deux autres.

1. L'entier $n = 286$ appartient à E.
2. Déterminer l'entier a.
3. On suppose que N_1 et N_2 sont deux entiers tels que

$$N_1 \leqslant n < N_2.$$

Encadrer l'entier b à l'aide de N_1 et N_2.
En déduire les entiers $n \in E$ compris entre $N_1 = 6.10^4$ et $N_2 = 8.10^4$.

Représentation en bases variées

146. Soient x, y et z, trois entiers naturels. On suppose que

— l'écriture de y en base x est 131 ;
— l'écriture de z en base x est 101.

146.1 Sans connaître x, on peut écrire le produit xyz en base x.
146.2 On suppose que $x + y + z = 50$ (écriture décimale). Déterminer le nombre x et le produit xyz (en écriture décimale).

147. Soit $N \in \mathbb{N}$. En écriture décimale, on suppose que N s'écrit $abcd$:

$$N = 10^3a + 10^2b + 10c + d$$

et que l'entier p qui s'écrit $bcda$:

$$p = 10^3b + 10^2c + 10d + a$$

est divisible par 7.
147.1 Si $a = 0$ ou $a = 7$, alors N est divisible par 7.
Comme l'entier $10N - 3a$ est multiple de 7, si l'entier N est divisible par 7, alors $a = 0$ ou $a = 7$.
147.2 On suppose que $a = 7$, $b = d$, $c = 0$ et que N est divisible par 3. Déterminer N.

148. Soient $0 \leqslant a, b, c < 5$, trois entiers. On suppose qu'un entier naturel N s'écrit $abc0$ en base 5 et abc en base 12. En raisonnant modulo 4, déterminer a, b, c et N.

149. Soient $0 \leqslant a, b, c < 5$, trois entiers. On suppose qu'un entier naturel N s'écrit $abcca$ en base 5 et $bbab$ en base 8. Déterminer l'écriture décimale de N.

150. Soit $a \geqslant 2$, un entier naturel. On suppose que l'entier $N = 341$ (écriture décimale) s'écrit 2331 en base a :

$$341 = 2a^3 + 3a^2 + 3a + 1.$$

En commençant par encadrer a^3, déterminer a.

151. On considère les trois entiers naturels

$$x = 20, \quad y = 33, \quad z = 1100$$

écrits en base $a \geqslant 4$ et on suppose que $z = xy$. Déterminer a.

152. On considère l'entier A qui s'écrit $5x23$ en base 6 :

$$A = 5.6^3 + 6^2x + 2.6 + 3.$$

152.1 Déterminer x pour que A soit divisible par 7.
152.2 Déterminer x pour que A soit divisible par 5.
152.3 L'entier A peut-il être divisible par 35 ?

153. On suppose que l'entier n s'écrit xyz en base 7 et zyx en base 9. Déterminer l'écriture décimale de n.

154. On considère les entiers m et n qui admettent respectivement

$$506\,390^{128} \quad \text{et} \quad 651x$$

pour écritures décimales. (Le chiffre x est donc compris entre 0 et 9.)
154.1 Déterminer en fonction de k le reste de la division euclidienne de 3^k par 7. En déduire le reste de la division euclidienne de m par 7.
154.2 On suppose que $m + n$ est divisible par 7. Que vaut l'entier x ?