Chapitre 18 - Topologie —

✍ *Commençons par rappeler les propriétés qu'il faut absolument connaître sur les hyperplans.*

Soit H*, une partie d'un espace vectoriel* E *(de dimension quelconque).*

❧ ***Première caractérisation*** — *La partie* H *est un hyperplan si, et seulement si, il existe une forme linéaire* $f \in L(E, \mathbb{K})$ *non identiquement nulle telle que* $H = \operatorname{Ker} f$.

En dimension finie, l'hyperplan H *est alors représenté par une équation cartésienne :*

$$H = \big[f(x_1, \dots, x_n) = 0\big]$$

dans le cas $\dim E = n$.

Une telle forme linéaire n'est pas unique mais presque : si $H = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$*, alors il existe un scalaire* α *non nul tel que*

$$\forall\, x \in E, \quad f(x) = \alpha g(x).$$

❧ ***Deuxième caractérisation*** — *La partie* H *est un hyperplan si, et seulement si, il existe un vecteur* $a \neq 0_E$ *tel que* $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a$.

❧ ***Choix d'un supplémentaire*** — *Si* H *est un hyperplan, alors* $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a$ <u>*quel que soit le vecteur*</u> $a \in E \setminus H$.

❧ ***Lien entre supplémentaire et forme linéaire*** — *Si l'hyperplan* $H \subset E$ *est le noyau de la forme linéaire* f*, alors il existe un vecteur* $a \in E$ *tel que* $f(a) = 1$ *et, quel que soit* $x \in E$*, il existe un vecteur* $x_H \in H$ *et un scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tels que* $x = x_H + \lambda \cdot a$*. Par linéarité de* f*, on en déduit que*

$$x = x_H + f(x) \cdot a.$$

1❧ Quelle que soit la partie H de E, on a toujours : $H \subset \overline{H} \subset E$.

❧ L'adhérence $\overline{H}$ est, par définition, contenue dans l'espace vectoriel E. Le vecteur nul 0_E appartient au sous-espace H et par conséquent à $\overline{H}$. Enfin, $\overline{H}$ est stable par combinaison linéaire (propriété dite "linéarité de la limite"). Par conséquent, l'adhérence $\overline{H}$ est encore un sous-espace de E.

✍ *L'adhérence de tout sous-espace de* E *est encore un sous-espace de* E.

On distingue alors deux cas.

❧ Si $H = \overline{H}$, alors H est fermé. (L'adhérence d'une partie est toujours fermée !)

❧ Sinon $H \subsetneq \overline{H}$, donc il existe un vecteur $a \in \overline{H} \setminus H$ et

$$E = H \oplus \mathbb{K} \cdot a \subset \overline{H} \subset E$$

(puisque $\overline{H}$ est un sous-espace qui contient à la fois H et $\mathbb{K} \cdot a$). On constate alors que H est dense dans E : $\overline{H} = E$.

✍ *Il n'y a donc que deux possibilités :*
- *ou bien un hyperplan est fermé (ce qui est toujours le cas si la dimension de* E *est finie) ;*
- *ou bien il est dense dans* E.

2❧ Si la forme linéaire f est continue, alors son noyau est fermé.

✍ *L'image réciproque* $\operatorname{Ker} f = [f(x) = 0]$ *du fermé* $\{0\}$ *par une application continue* $f : E \to \mathbb{K}$ *est fermée.*

❧ Réciproquement, si la forme linéaire f n'est pas continue, alors elle n'est pas bornée au voisinage de 0_E (Théorème de caractérisation des applications linéaires continues **[55]**). Il existe donc une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers le vecteur nul et telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \big|f(u_n)\big| = +\infty.$$

Par conséquent, pour tout entier n assez grand, le scalaire $f(u_n)$ n'est pas nul :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geqslant n_0, \qquad f(u_n) \neq 0.$$

Pour tout $n \geqslant n_0$, on pose alors

$$v_n = \frac{u_n}{f(u_n)} \quad \text{et on remarque que} \quad f(v_n) = \frac{f(u_n)}{f(u_n)} = 1.$$

Par homogénéité de la norme,

$$\forall\, n \geqslant n_0, \qquad \|v_n\| = \frac{\|u_n\|}{|f(u_n)|}.$$

Par hypothèse, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers $+\infty$, donc la suite $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers le vecteur nul 0_E.

Cela dit, par linéarité de f,

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad v_n - v_{n_0} \in \operatorname{Ker} f$$

puisque $f(v_n - v_{n_0}) = f(v_n) - f(v_{n_0}) = 1 - 1 = 0$ et comme v_n converge vers 0_E, alors

$$\lim_{n \to +\infty} v_n - v_{n_0} = -v_{n_0} \notin \operatorname{Ker} f$$

puisque $f(-v_{n_0}) = -f(v_{n_0}) = -1$.

On a ainsi démontré que $\operatorname{Ker} f$ n'était pas fermé (ce sous-espace n'est pas stable par passage à la limite).

✍ *Cette alternative démontre que le noyau d'une forme linéaire est fermé si, et seulement si, la forme linéaire est continue.*

3❧ Dans cette question, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Si la forme linéaire f est continue, alors les trois parties

$$[f(x) > 0] = \big[f(x) \in \,]0, +\infty[\big], \quad [f(x) < 0] = \big[f(x) \in \,]-\infty, 0[\big], \quad [f(x) \neq 0] = \big[f(x)$$

sont des ouverts de E.

✍ *L'image réciproque d'un intervalle ouvert par une application continue est ouverte.*

L'image réciproque d'un intervalle fermé par une application continue est fermée.

Le complémentaire d'un fermé est un ouvert.

❧ La partie $P_+ = [f(x) > 0]$ est convexe : si deux vecteurs x_1 et x_2 appartiennent à P_+, alors $f(x_1) > 0$ et $f(x_2) > 0$; quel que soit $t \in [0, 1]$, on a donc

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2) > 0$$

ce qui prouve que $(1-t)x_1 + tx_2 \in P_+$.

✍ *Pour $0 < t < 1$, l'expression $(1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ est la somme de deux termes strictement positifs.*

Pour $t = 0$, il reste $f(x_1) > 0$ (par hypothèse) ; pour $t = 1$, il reste $f(x_2) > 0$ (par hypothèse aussi).

Toute partie convexe est connexe par arcs, donc P_+ est connexe par arcs.

Il est clair que la même démonstration prouve que $P_- = [f(x) < 0]$ est convexe et donc connexe par arcs.

✍ *On n'a pas eu besoin de la continuité de f pour conclure.*

❧ Comme f n'est pas identiquement nulle, il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$ et comme f est linéaire, $f(-x_0) = -f(x_0)$.

Si f est continue sur E et s'il existe une fonction continue

$$\gamma \;:\; [0, 1] \to E \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} \gamma(0) = x_0 \\ \gamma(1) = -x_0 \\ \forall\, t \in [0, 1], \quad \gamma(t) \in P_+ \sqcup P_- = H^c \end{cases}$$

alors $f \circ \gamma \;:\; [0, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, définie sur un intervalle et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer le Théorème des valeurs intermédiaires. Comme $(f \circ \gamma)(0) = f(x_0)$ et $(f \circ \gamma)(1) = -f(x_0)$, la fonction $f \circ \gamma$ change de signe et il existe donc un réel $t_1 \in [0, 1]$ tel que $(f \circ \gamma)(t_1) = 0$, ce qui signifie que $\gamma(t_1) \in H$: c'est impossible par hypothèse.

Par conséquent, si la forme linéaire $f \in L(E, \mathbb{R})$ est continue sans être identiquement nulle, alors $[f(x) \neq 0]$ est ouvert mais pas connexe par arcs.

4❧

✍ *Dans la suite, l'hyperplan $H = \operatorname{Ker} f$ est supposé fermé.*
D'après le cours,

$$\begin{aligned} d(x, H) = 0 &\iff x \in \overline{H} && \text{(cours !)} \\ &\iff x \in H && \text{(H est fermé)} \\ &\iff f(x) = 0. \end{aligned}$$

La propriété a établir est évidente dans ce cas (très) particulier.
Nous supposerons par la suite que $x \notin \operatorname{Ker} f$ et (donc !) que $d(x, H) > 0$.

❧ **Version euclidienne**

On suppose ici que E est un espace euclidien. Par conséquent, il existe un vecteur unitaire a tel que

$$E = H \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R} \cdot a.$$

Comme $x \notin H$, le vecteur x n'est pas le vecteur nul et il existe un vecteur $x_H \in H$ et un scalaire $t \neq 0$ tels que $x = x_H + t \cdot a$. Comme a est orthogonal à H, on déduit du théorème de Pythagore que

$$\|x\| = |t| \sqrt{1 + \frac{\|x_H\|^2}{t^2}}.$$

Par linéarité de f, on a $f(x) = t \cdot f(a)$ (puisque $H = \operatorname{Ker} f$) et par conséquent, comme $x \neq 0_E$,

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \frac{|f(a)|}{\sqrt{1 + {}^{\|x_H\|^2}/_{t^2}}} \leqslant |f(a)|.$$

On a ainsi démontré que

$$\forall\, x \in E \setminus H, \quad |f(x)| \leqslant |f(a)| \cdot \|x\|.$$

Il est clair que cette propriété est encore vraie pour $x \in H = \operatorname{Ker} f$. Nous avons ainsi démontré que $f \in L(E, \mathbb{R})$ était une application continue (ce qui n'est pas une surprise) et que

$$|||f||| \leqslant |f(a)|.$$

Par ailleurs, comme a est un vecteur unitaire,

$$|f(a)| \leqslant |f(a)| \cdot \|a\|$$

et ce cas d'égalité prouve que

$$|||f||| = |f(a)|.$$

D'autre part, comme $x = x_H + t \cdot a$ où $x_H \in H$ et $a \in H^\perp$, on déduit du cours que $d(x, \operatorname{Ker} f) = \|t \cdot a\| = |t|$ (puisque le vecteur a est unitaire). D'après les calculs précédents,

$$d(x, \operatorname{Ker} f) = |t| = \frac{|f(x)|}{|f(a)|} = \frac{|f(x)|}{|||f|||}.$$

✍ *La propriété que nous venons de démontrer est vraie en dehors du cadre des espaces euclidiens.*

❧ **Version générale**

Nous supposons toujours que $x \notin H = \overline{H}$ et donc que $f(x) \neq 0$ et que $d(x, H) > 0$.

❧ Comme $x \notin H$ et que H est un hyperplan, on a $E = H \oplus \mathbb{K} \cdot x$. Pour tout vecteur $y \notin H$ non nul, il existe donc un vecteur $y_H \in H$ et un scalaire $t \in \mathbb{K}$ tel que $y = y_H + t \cdot x$.

✍ *On a choisi y en dehors du sous-espace vectoriel H. Comme $0_E \in H$, on en déduit que $u \neq 0_E$.*

Comme $y \neq 0_E$, le scalaire t n'est pas nul ! On en déduit comme plus haut que

$$\left|f(y)\right| = |t| \cdot \left|f(x)\right| \quad \text{et que} \quad \|y\| = \|y_H + t \cdot x\| = |t| \cdot \left\|x + \frac{1}{t} \cdot y_H\right\|$$

Comme $1/t \cdot y_H \in H$, on en déduit que

$$\|y\| \geqslant |t| \inf_{u \in H} \|x + u\| = d(x, H).$$

Ayant majoré le numérateur et minoré le dénominateur, on en déduit que

$$\forall\, y \in E \setminus H, \quad \frac{\left|f(y)\right|}{\|y\|} \leqslant \frac{\left|f(x)\right|}{d(x, \operatorname{Ker} f)}.$$

Le membre de gauche est nul pour tout $y \in H \setminus \{0_E\}$, donc

$$\forall\, y \neq 0_E, \quad \frac{\left|f(y)\right|}{\|y\|} \leqslant \frac{\left|f(x)\right|}{d(x, \operatorname{Ker} f)}.$$

En passant à la borne supérieure par rapport au paramètre y, on en déduit que

$$|||f||| \leqslant \frac{\left|f(x)\right|}{d(x, \operatorname{Ker} f)}.$$

❧ Réciproquement, on rappelle que

$$d(x, \operatorname{Ker} f) = \inf_{y \in H} \|x - y\|.$$

Pour tout $y \in H = \operatorname{Ker} f$,

$$\left|f(x)\right| = \left|f(x - y)\right| \leqslant |||f|||\, \|x - y\|$$

puisque l'application linéaire f est supposée continue. On a donc

$$\forall\, y \in H, \quad \|x - y\| \geqslant \frac{\left|f(x)\right|}{|||f|||}.$$

On peut donc passer à la borne inférieure par rapport au paramètre y et obtenir enfin :

$$d(x, \operatorname{Ker} f) \geqslant \frac{\left|f(x)\right|}{|||f|||}.$$

❧ On a ainsi démontré par double inégalité que

$$d(x, \operatorname{Ker} f) = \frac{\left|f(x)\right|}{|||f|||}$$

pour toute forme linéaire f continue sur E.