RMS 134 [1387]

> *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$, *on note*
> $$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$
> *On considère une application* $\varphi : \mathfrak{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *telle que*
> $$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C}), \qquad \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B) \tag{1}$$
> *et telle que*
> $$\forall\, \lambda \in \mathbb{C}, \quad \varphi(A_\lambda) = \lambda. \tag{2}$$
> *Démontrer que*
> $$\forall\, M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C}), \quad \varphi(M) = \det M.$$

✍ *Comme il est question de matrices à coefficients complexes, il faut tout de suite penser à trigonaliser la matrice M !*

❧ **Cas des matrices inversibles** — D'après (2),
$$\varphi(I_2) = 1.$$
On déduit de (1) que, pour toute matrice inversible $P \in GL_2(\mathbb{C})$,
$$\varphi(P)\varphi(P^{-1}) = \varphi(I_2) = 1.$$
L'image de $GL_2(\mathbb{C})$ est donc contenue dans $\mathbb{C}^*$ et
$$\forall\, P \in GL_2(\mathbb{C}), \quad \varphi(P^{-1}) = \frac{1}{\varphi(P)}.$$

❧ **Cas des matrices semblables** — Si deux matrices A et B sont semblables, alors il existe une matrice inversible P telle que
$$B = P^{-1}AP.$$
D'après (1) et ce qui précède,
$$\varphi(B) = \varphi(P^{-1})\varphi(A)\varphi(P) = \varphi(A).$$

❧ La matrice
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
prouve que les deux matrices A_λ et B_λ sont semblables et donc que
$$\forall\, \lambda \in \mathbb{C}, \quad \varphi(B_\lambda) = \lambda = \det B_\lambda. \tag{3}$$

❧ **Cas des matrices diagonalisables** — Si la matrice $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable, alors elle est semblable à
$$\mathrm{Diag}(\lambda, \mu) = A_\lambda B_\mu$$
où λ et μ sont deux nombres complexes (non nécessairement distincts). On déduit alors de (1), (2) et (3) que
$$\varphi(M) = \varphi(A_\lambda B_\mu) = \varphi(A_\lambda)\varphi(B_\mu) = \lambda\mu = \det M. \tag{4}$$

❧ **Trigonalisation** — Toute matrice $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ est trigonalisable, c'est-à-dire qu'elle est semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = A_\lambda B_\mu T \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

✍ *Si la matrice A n'est pas alors les deux valeurs propres λ et μ sont égales (cours) et on peut démontrer qu'il est possible de choisir $\alpha = 1$ (exercice classique).*

Toujours d'après (1), (2) et (3),

$$\varphi(M) = \varphi(A_\lambda)\varphi(B_\mu)\varphi(T) = \lambda\mu\varphi(T) = \det M \times \varphi(T).$$

Il reste donc à calculer $\varphi(T)$ avec un peu d'astuce...

❧ On remarque que

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ ayant deux valeurs propres distinctes est diagonalisable. On déduit de (1) et (4) (avec $a = \alpha/4$) que

$$\varphi(T) = \begin{vmatrix} 2 & a \\ 0 & 1/2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1/2 & a \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

et finalement que

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C}), \qquad \varphi(M) = \det M.$$