RMS 134 [1384]

Soit S*, l'ensemble des couples* $(P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ *tels que*

$$(X-1)^n Q + X^n P = 1.$$

$\boxed{1}$ *Démontrer qu'il existe un, et un seul, couple* $(P_0, Q_0) \in S$ *tel que* $\deg P_0 < n$ *et* $\deg Q_0 < n$.

$\boxed{2}$ *Déterminer les éléments de* S.

$\boxed{1}$ Les polynômes $X-1$ et X sont premiers entre eux (Bézout : $X-(X-1) = 1$). Par conséquent, les polynômes $(X-1)^n$ et X^n sont premiers entre eux et (Bézout) il existe donc des couples (U, V) de polynômes tels que

$$(X-1)^n U + X^n V = 1.$$

L'ensemble S n'est donc pas vide.

❧ Considérons un couple (P_1, Q_1) de polynômes tels que

$$(X-1)^n Q_1 + X^n P_1 = 1$$

et effectuons la division euclidienne de P_1 par $(X-1)^n$: il existe donc un polynôme A et un polynôme $P_0 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que

$$P_1 = (X-1)^n A + P_0.$$

En posant $Q_0 = Q_1 + X^n A$, on obtient alors

$$(X-1)^n Q_0 + X^n P_0 = (X-1)^n [Q_1 + X^n A] + X^n [P_1 - (X-1)^n A] = 1.$$

On a donc $(X-1)^n Q_0 = 1 - X^n P_0$ et comme $\deg P_0 < n$, on en déduit que

$$n + \deg Q_0 \leqslant n + \deg P_0 < 2n$$

et donc $\deg Q_0 < n$.

Le couple (P_0, Q_0) est donc un élément de S tel que $\deg P_0 < n$ et $\deg Q_0 < n$.

❧ Considérons un couple (P_2, Q_2) de polynômes tels que

$$(X-1)^n Q_2 + X^n P_2 = 1 = (X-1)^n Q_0 + X^n P_0.$$

Alors $(X-1)^n (Q_2 - Q_0) = X^n (P_0 - P_2)$ et comme X^n et $(X-1)^n$ sont premiers entre eux, alors $(X-1)^n$ divise $P_2 - P_0$ et X^n divise $Q_2 - Q_0$: il existe donc deux polynômes A et B tels que

$$P_2 - P_0 = (X-1)^n A \quad \text{et} \quad Q_2 - Q_0 = X^n B.$$

Si $\deg P_2 < n$ et $\deg Q_2 < n$, alors les degrés de $(P_2 - P_0)$ et de $(Q_2 - Q_0)$ sont aussi strictement inférieurs à n. Il faut donc que $A = B = 0$ et donc

$$(P_2, Q_2) = (P_0, Q_0).$$

Il existe donc un, et un seul, couple (P_0, Q_0) dans S tel que $\deg P_0 < n$ et $\deg Q_0 < n$.

$\boxed{2}$ On a déterminé une solution particulière $(P_0, Q_0) \in S$.

On a démontré que : si $(P, Q) \in S$, alors il existe $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = P_0 + (X-1)^n A.$$

Comme $(X-1)^n Q + X^n P = (X-1)^n Q_0 + X^n P_0$, on en déduit que

$$Q = Q_0 - X^n A.$$

Réciproquement, il est clair que, pour tout $A \in \mathbb{R}[X]$, le couple

$$(P, Q) = \big(P_0 + (X-1)^n A,\ Q_0 - X^n A\big)$$

appartient à S.

Ainsi

$$S = \big\{\big(P_0 + (X-1)^n A,\ Q_0 - X^n A\big),\ A \in \mathbb{R}[X]\big\}.$$