RMS 134 [1389]

On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1❧ *Quel est le rang de A ? Donner une base de l'image de A.*
2❧ *Donner une équation de l'image de A. Le vecteur B appartient-il à l'image de A ?*

1❧ Avec les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$, on trouve que

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

et, d'après le cours, ces deux matrices ont même rang.

Le rang d'une matrice est toujours inférieur au nombre de colonnes, donc $\operatorname{rg} A \leqslant 3$.

Il est clair que, pour la seconde matrice, les colonnes C_2 et C_3 ne sont pas proportionnelles. Donc $\operatorname{rg} A \geqslant 2$.

D'autre part, la colonne C_1 n'est pas une combinaison linéaire de C_2 et C_3, donc $\operatorname{rg} A \geqslant 3$.

Donc le rang de A est égal à 3 et les colonnes de A forment une famille libre.

❧ L'image d'une matrice est engendrée par les colonnes de la matrice. Comme les trois colonnes forment une famille libre, elles constituent en fait une base de l'image de A.

✍ *On travaille ici dans un espace de dimension 4 et l'image de A est donc un hyperplan.*

2❧ D'après le cours, si la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille libre, alors le vecteur v appartient au sous-espace $\operatorname{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ si, et seulement si, la famille (u_1, u_2, u_3, v) est liée.

Par conséquent, le vecteur

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \text{appartient à } \operatorname{Im} A \text{ si, et seulement si,} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \\ 3 & 2 & 1 & t \end{vmatrix} = 0.$$

En développant par la dernière colonne, on obtient ainsi une équation cartésienne de l'image de A.

$$V \in \operatorname{Im} A \qquad \iff \qquad 2x - 8z + 2t = 0.$$

❧ Comme $2 \times 1 - 8 \times 3 + 2 \times 4 \neq 0$, le vecteur B n'appartient pas à l'image de A.

✍ *Si on ne dispose pas d'une équation cartésienne pour représenter l'hyperplan Im A, on peut calculer le rang de la matrice obtenue en concaténant A et B.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier assez rapidement que le rang de cette matrice est égal à 4, ce qui prouve que la colonne B n'est pas une combinaison linéaire des colonnes qui engendrent l'image de A.