RMS 134 [1382]

$\boxed{1}$ *Soient a et b, deux entiers relatifs non nuls, premiers entre eux. Démontrer que : si a divise c et si b divise c, alors ab divise c.*

$\boxed{2}$ *Trouver un entier relatif x tel que*

$$x \equiv 6 \pmod{17} \quad \text{et} \quad x \equiv 4 \pmod{15}. \tag{$\star$}$$

$\boxed{3}$ *Résoudre ($\star$).*

$\boxed{1}$ **[Question de cours]** Comme a et b sont premiers entre eux, il existe deux entiers u et v tels que

$$au + bv = 1.$$

On en déduit que

$$acu + bcv = c.$$

Comme a et b divisent c, il existe deux entiers k et q tels que

$$c = ka = qb.$$

On en déduit que

$$c = a(qb)u + b(ka)v = (ab)(qu + kv)$$

et comme $qu + kv \in \mathbb{Z}$, on a démontré que ab divise c.

✍ *Réciproquement, si ab divise c, alors il est clair que a et b divisent c.*

$\boxed{2}$ Comme $11 + 6 = 17$ et $11 + 4 = 15$, on dispose d'une solution "évidente" :

$$-11 \equiv 6 \pmod{17} \quad \text{et} \quad -11 \equiv 4 \pmod{15}.$$

✍ *Si on ne voit pas que $x = -11$ est une solution particulière, on peut en trouver une en appliquant la méthode usuelle qui part de l'équation de Bézout pour $a = 17$ et $b = 15$.*

L'algorithme d'Euclide nous donne

$$8 \times 15 - 7 \times 17 = 120 - 119 = 1.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} -119 &\equiv 1 \pmod{15} \\ &\equiv 0 \pmod{17} \end{aligned} \quad \text{et que} \quad \begin{aligned} 120 &\equiv 0 \pmod{15} \\ &\equiv 1 \pmod{17}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$x_0 = 6 \times 120 - 4 \times 119 = 720 - 476 = 244$$

est une solution particulière de ($\star$).

$\boxed{3}$ Comme -11 est une solution particulière, un entier relatif x est une solution de ($\star$) si, et seulement si, $x + 11$ est divisible par 15 et par 17. D'après la première question, cela équivaut au fait que $x + 11$ soit divisible par

$$15 \times 17 = (16 - 1)(16 + 1) = 256 - 1 = 255.$$

Par conséquent, x est solution de ($\star$) si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x = -11 + 255k = 244 + 255(k - 1).$$