RMS 134 [1400]

> *Soient E, un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $p_1, \dots, p_n$, des endomorphismes non nuls de E tels que*
>
> $$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i.$$
>
> **1❧** *Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} p_i$ (avec $1 \leqslant i \leqslant n$) sont en somme directe.*
>
> **2❧** *Le rang de p_i est égal à 1 pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.*

1❧ Considérons des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0_E \quad \text{et} \quad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad x_i \in \operatorname{Im} p_i.$$

Par hypothèse, $p_i \in L(E)$ et $p_i \circ p_i = p_i$, donc p_i est un projecteur. Comme $x_i \in \operatorname{Im} p_i$, on en déduit que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \quad x_i = p_i(x_i)$$

et donc que

$$\forall\, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \quad p_j(x_i) = (p_j \circ p_i)(x_i) = 0_E.$$

Par linéarité de p_j,

$$\begin{aligned} 0_E = p_j(0_E) = p_j\Bigl(\sum_{i=1}^{n} x_i\Bigr) \\ = \sum_{i=1}^{n} p_j(x_i) = x_j \end{aligned}$$

pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$.

On a ainsi démontré que les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} p_j$ étaient en somme directe.

2❧ On a donc

$$\bigoplus_{j=1}^{n} \operatorname{Im} p_j \subset E$$

et donc

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{rg} p_j \leqslant \dim E = n.$$

Par hypothèse, aucun des endomorphismes p_j n'est l'endomorphisme nul, donc

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \operatorname{rg} p_j \geqslant 1.$$

On en déduit que

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{(\operatorname{rg} p_j - 1)}_{\geqslant 0} \leqslant (n - n) = 0$$

et donc que

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \operatorname{rg} p_j = 1.$$