RMS 134 [1402]

> *Soient* $A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. *On suppose que* AB *est semblable à la matrice* $\mathrm{Diag}(0,9,9)$. *Calculer le rang de* BA *et déterminer* BA.

❧ Par hypothèse, $AB \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et $BA \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, il existe une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}(AB)P = \mathrm{Diag}(0,9,9).$$

Autrement dit : $(P^{-1}A)(BP) = \mathrm{Diag}(0,9,9)$. Comme

$$BA = (BP)(P^{-1}A),$$

quitte à remplacer A par $P^{-1}A$ et B par BP, on peut donc supposer que le produit AB est **égal** à $\mathrm{Diag}(0,9,9)$ (et pas seulement semblable à cette matrice diagonale).

❧ Par hypothèse, il est clair que le rang de AB est égal à 2.

Le rang d'une matrice est toujours inférieur au nombre de ses lignes, ainsi qu'au nombre de ses colonnes. Par conséquent, les rangs de A, B et BA sont tous inférieurs à 2.

❧ Comme $\mathrm{Im}(AB) \subset \mathrm{Im}\,A$, le rang de AB est inférieur au rang de A. On a donc :

$$2 = \mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}\,A \leqslant 2$$

et donc $\mathrm{rg}\,A = 2$. Comme $A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, les deux colonnes de A sont linéairement indépendantes et le noyau de la matrice A est donc réduit au vecteur nul.

Il existe donc une matrice ligne $L_0 \in \mathfrak{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $A_0 \in GL_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A = \begin{pmatrix} L_0 \\ A_0 \end{pmatrix}.$$

❧ Le rang de B est inférieur à 2 et le nombre de colonnes de B est égal à 3, donc la famille des colonnes de B est liée et le noyau de B n'est donc pas réduit au vecteur nul.

Si $BX = 0$, alors

$$0 = ABX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} X$$

et par conséquent

$$X \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme le noyau de B n'est pas réduit au vecteur nul, on a donc démontré que

$$BX = 0 \iff X \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et que le rang de B est égal à 2.

Il existe donc une matrice $B_0 \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que

$$B = \begin{pmatrix} 0_{2,1} & B_0 \end{pmatrix}.$$

❧ Finalement, on a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = AB = \begin{pmatrix} 0 & L_0B_0 \\ 0_{2,1} & A_0B_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = 0_{2,1}L_0 + B_0A_0.$$

Autrement dit,

$$A_0B_0 = 9I_2, \quad L_0B_0 = 0_{1,2}, \quad BA = B_0A_0.$$

Comme B_0 est inversible, on en déduit que $L_0 = 0_{1,2}$ et que $A_0 = 9B_0^{-1}$.

On a ainsi démontré que

$$BA = 9I_2$$

et en particulier que $\mathrm{rg}(BA) = 2$.