RMS 134 [1395]

> *Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A est inversible et que B est nilpotente.*
> **1❧** *Si ces deux matrices commutent : $AB = BA$, alors les matrices $A - B$ et $A + B$ sont inversibles.*
> **2❧** *Sinon, la matrice $A + B$ n'est pas nécessairement inversible.*

✍ *On généralise ici un résultat du cours : si x est un élément nilpotent d'indice n dans un anneau A, alors $1_A - x$ est inversible et*

$$(1_A - x)^{-1} = 1_A + x + \cdots + x^{n-1}.$$

1❧ Comme $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, on sait que l'indice de nilpotence de B est inférieur à n :

$$B^n = 0_n.$$

Comme les matrices A et B commutent, on sait que

$$(A - B)\sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{(n-1)-k} = A^n - B^n = A^n$$

$$(A + B)\sum_{k=0}^{n-1} A^k (-B)^{(n-1)-k} = A^n - (-B)^n = A^n$$

et comme A^n est inversible (puisque A est inversible), on en déduit que les deux matrices $A \pm B$ sont inversibles avec

$$(A - B)^{-1} = (A^n)^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{(n-1)-k},$$

$$(A + B)^{-1} = (A^n)^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} A^k (-B)^{(n-1)-k}.$$

✍ *La formule de la somme géométrique*

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y) \star \left(\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}\right)$$

est vraie dans n'importe quel anneau $(A, +, \star)$, commutatif ou non, pourvu que les deux éléments x et y considérés ici commutent entre eux.

2❧ Il est clair que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente. Il est tout aussi clair que la matrice

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.

✍ *Il suffit de trouver un contre-exemple, le plus simple est le meilleur.*

On commence donc par choisir la matrice nilpotente la plus simple qui soit.

Pour que la somme $A + B$ ne soit pas inversible, il suffit que la seconde colonne de cette matrice soit nulle, ce qui impose la seconde colonne de A.

Pour que A soit inversible, il suffit alors de choisir une première colonne non proportionnelle à la seconde colonne qu'on vient de choisir.

Et le tour est joué !