RMS 134 [1399]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1❧ *Si u et v sont deux endomorphismes nilpotents non nuls de $\mathbb{R}^n$ qui commutent, alors*

$$\operatorname{rg}(u \circ v) < \operatorname{rg} v.$$

2❧ *Si $u_1, \dots, u_n$ sont des endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^n$ qui commutent deux à deux, alors la composée*

$$u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n$$

est l'endomorphisme nul.

✍ *Il s'agit ici de généraliser un résultat du cours : si u est un endomorphisme nilpotent d'un espace de dimension n, alors l'indice de nilpotence de u est inférieur à n et u^n est l'endomorphisme nul.*

1❧ Comme u et v sont deux endomorphismes nilpotents d'un espace vectoriel de dimension n, leur indice de nilpotence est strictement inférieur à n et

$$u^n = v^n = \omega.$$

❧ Il est clair que $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ et donc que

$$\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v.$$

❧ Comme u et v commutent, le sous-espace $F = \operatorname{Im} v$ est stable par u et

$$\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u \circ v).$$

Comme v n'est pas l'endomorphisme nul, alors $\dim F = \operatorname{rg} v \geqslant 1$.

❧ Considérons l'endomorphisme u_F de F induit par restriction de u au sous-espace stable F. Pour tout $x \in F$,

$$u_F(x) = u(x) \in F$$

donc

$$\forall\, x \in F, \quad (u_F)^n(x) = u^n(x) = 0_E.$$

Ainsi, u_F est un endomorphisme nilpotent de F et en particulier

$$\operatorname{rg} u_F < \dim F = \operatorname{rg} v.$$

Par définition de l'image d'une application linéaire, un vecteur y appartient à $\operatorname{Im} u_F$ si, et seulement si, il existe un vecteur $x \in F$ tel que $y = u_F(x) = u(x)$ c'est-à-dire, par définition du sous-espace F, s'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que

$$y = u(x) = u\big(v(x_0)\big) = (u \circ v)(x_0) = (v \circ u)(x_0)$$

(On rappelle que u et v commutent.) Autrement dit :

$$\operatorname{Im} u_F = \operatorname{Im}(u \circ v) = \operatorname{Im}(v \circ u)$$

et en particulier

$$\operatorname{rg} u_F = \operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(v \circ u).$$

On a ainsi démontré que

$$\operatorname{rg}(u \circ v) < \operatorname{rg} v.$$

✍ *Par symétrie, on a également démontré que*

$$\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(v \circ u) < \operatorname{rg} u.$$

$\boxed{2❧}$ Considérons des endomorphismes nilpotents $u_1, \dots, u_n$ de $\mathbb{R}^n$ qui commutent deux à deux et la famille d'entiers naturels $(d_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ définie par

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad d_k = \mathrm{rg}(u_1 \circ \cdots \circ u_k).$$

❧ Pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, l'endomorphisme $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_k$ est nilpotent :

$$(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_k)^n = u_1^n \circ u_2^n \circ \cdots \circ u_k^n = \omega$$

car les endomorphismes u_ℓ commutent deux à deux et leurs indices de nilpotence respectifs sont tous majorés par n (= la dimension de l'espace vectoriel sur lequel ils agissent).

❧ Il est clair que $d_1 = \mathrm{rg}\, u_1 < n$ et, d'après ce qui précède, pour tout $1 \leqslant k < n$, deux cas se présentent :

— ou bien l'endomorphisme $v_k = u_1 \circ \cdots \circ u_k$ est nul et, dans ce cas,

$$u_1 \circ \cdots \circ u_n = u_1 \circ \cdots \circ u_k \circ \cdots \circ u_n$$

est l'endomorphisme nul ;

— ou bien v_k est un endomorphisme nilpotent non nul qui commute avec u_{k+1} et, dans ce cas, $d_{k+1} < d_k$.

Si l'endomorphisme $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n$ n'était pas l'endomorphisme nul, alors on aurait une famille <u>strictement</u> décroissante de n entiers naturels <u>strictement</u> compris entre 0 et n :

$$0 < d_n < d_{n-1} < \cdots < d_1 < n$$

ce qui est évidemment impossible.

La composée $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n$ est donc l'endomorphisme nul.