Soit $E = \mathbb{C}[X]$. *Pour tout polynôme*

$$P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k,$$

on pose

$$\|P\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

Pour tout $b \in \mathbb{C}$, *on étudie la forme linéaire* $f : E \to \mathbb{C}$ *définie par*

$$\forall\, P \in E, \quad f(P) = P(b).$$

1❧ *Démontrer que* $\|\cdot\|$ *est une norme sur* E.
2❧ *Si* $|b| > 1$, *alors* f *n'est pas continue.*
3❧ *On suppose que* $|b| = 1$. *En considérant les polynômes*

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \overline{b}^k X^k,$$

on montre que la forme linéaire f *n'est pas continue.*
4❧ *Si* $|b| < 1$, *alors la forme linéaire* f *est continue. Calculer la norme subordonnée* $|||f|||$.

1❧ Les a_k sont nuls à partir d'un certain rang, donc la famille $(|a_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille bornée de réels positifs. Par conséquent, la borne supérieure $\|P\|$ est bien définie et à valeurs réelles.

On vérifie sans peine (cf cours) que

$$\|P\| = 0 \implies P = 0$$

et que

$$\forall\, P \in E, \forall\, \lambda \in \mathbb{C}, \quad \|\lambda P\| = |\lambda|\, \|P\|.$$

Enfin, comme la borne supérieure est un majorant,

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |a_k + b_k| \leqslant |a_k| + |b_k| \leqslant \|P\| + \|Q\|.$$

En passant à la borne supérieure, on en déduit l'inégalité triangulaire :

$$\|P + Q\| \leqslant \|P\| + \|Q\|.$$

Ainsi, $\|\cdot\|$ est bien une norme sur E.

2❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est clair que $\|X^n\| = 1$ et

$$f(X^n) = b^n$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} \left| f(X^n) \right| = +\infty.$$

La forme linéaire f n'est donc pas bornée sur la sphère unité de E, donc elle n'est pas continue.

3❧ Comme $|b| = 1$, alors

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |\overline{b}^k| = 1$$

et par conséquent $\|P_n\| = 1$: on étudie encore une suite de polynômes situés sur la sphère unité de E.

Par ailleurs, comme $|b| = 1$,

$$f(P_n) = \sum_{k=0}^{n} \overline{b}^k \cdot b^k = \sum_{k=0}^{n} |b|^{2k} = n + 1$$

ce qui montre à nouveau que la forme linéaire f n'est pas bornée sur la sphère unité :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|P_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \big|f(P_n)\big| = +\infty.$$

La forme linéaire f n'est donc pas continue.

4❧ Si $|b| < 1$, alors

$$\big|f(P)\big| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k b^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k||b|^k \leqslant \|P\| \sum_{k=0}^{n} |b|^k$$

puisque

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad |a_k| \leqslant \|P\|.$$

La série géométrique $\sum |b|^k$ est convergente, donc

$$\forall\, P \in E, \qquad \big|f(P)\big| \leqslant \frac{1}{1-|b|} \cdot \|P\|,$$

ce qui prouve que la forme linéaire f est lipschitzienne et que

$$|||f||| \leqslant \frac{1}{1-|b|}.$$

❧ Supposons que $b = |b|\, e^{i\theta}$ et posons

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad P_n = \sum_{k=0}^{n} e^{-ik\theta} X^k.$$

Il est clair que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|P_n\| = 1$$

et que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(P_n) = \sum_{k=0}^{n} e^{-ik\theta} |b|^k e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} |b|^k.$$

Il existe donc une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|P_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \big|f(P_n)\big| = \frac{1}{1-|b|}.$$

On en déduit que

$$\sup_{\|P\|=1} \big|f(P)\big| \geqslant \frac{1}{1-|b|}.$$

Mais le premier calcul avait montré que

$$\sup_{\|P\|=1} \big|f(P)\big| \leqslant \frac{1}{1-|b|}$$

et par conséquent

$$|||f||| = \sup_{\|P\|=1} \big|f(P)\big| = \frac{1}{1-|b|}.$$