RMS 134 [1467]

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + x - 1.$$

1❧ *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un, et un seul, réel $x \in]0, +\infty[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.*

2❧ *La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée.*

3❧ *Écrire un code Python qui renvoie une valeur approchée de x_n à ε près obtenue par dichotomie. Conjecturer la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.*

4❧ *Démontrer cette conjecture.*

1❧ La fonction f_n est continue (polynomiale) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$. Elle est aussi dérivable et

$$\forall\, x > 0, \quad f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 \geqslant 1 > 0$$

donc la fonction f_n est strictement croissante sur I. Elle réalise donc une bijection de l'intervalle $I =]0, +\infty[$ sur l'intervalle

$$J = \left] \lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x) \right[=]-1, +\infty[.$$

Comme $0 \in J$, il existe un, et un seul, réel $x_n \in I$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2❧ Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$f_n(1) = 1 > 0 = f_n(x_n).$$

Comme la fonction f_n est croissante, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n < 1.$$

Comme $0 < x_n < 1$, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < x_n^{n+1} < x_n^n$$

et par conséquent

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n - 1 < x_n^n + x_n - 1 = f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$

Comme la fonction f_{n+1} est croissante, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n < x_{n+1}.$$

On a ainsi démontré que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ était (strictement) croissante et majorée (par 1).

3❧ Le code est classique.

```
def dichotomie(n, eps):
    def f(x):
        return x**n+x-1
    a, b = 0, 1
    fa = f(a)
    while b-a>eps:
        c = (a+b)/2
        fc = f(c)
        if fa*fc>0:
            a, fa = c, fc
        else:
            b = c
    return a, b

for n in range(1, 101):
    print(dichotomie(n, 0.001))
```

L'exécution de ce code suggère que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

$\boxed{4❧}$ Comme la suite (x_n) est croissante et majorée par 1, sa limite ℓ est elle aussi inférieure à 1.

Supposons donc que $\ell < 1$. Par croissance de la suite,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < x_n^n \leqslant \ell^n,$$

ce qui prouve par encadrement que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n^n = 0$$

et donc que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n^n + x_n - 1 = 0 + \ell - 1 = 0$$

puisque $f_n(x_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. On aboutit ainsi à $\ell = 1$, ce qui contredit l'hypothès de départ.

Il faut donc que $\ell = 1$.