RMS 134 [1531]

> *La probabilité pour qu'une personne passant sous l'échafaudage d'un peintre en bâtiment reçoive une goutte de peinture est $p \in]0,1[$. On note X (resp. Y), le nombre de passants ayant reçu une goutte de peinture (resp. n'ayant pas reçu de goutte de peinture).*
>
> **1❧** *On suppose que n personnes sont passées. Donner les lois de X et de Y. Calculer $\mathbf{Cov}(X,Y)$. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?*
>
> **2❧** *On suppose que N personnes sont passées, où N est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Donner les lois de X et de Y, ainsi que l'espérance et la variance de X. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?*

✍ *Nous allons commencer par traiter ces deux questions dans un même cadre général, avant de passer aux applications numériques.*

On modélise la situation décrite par l'énoncé de la manière suivante :

— il existe trois variables aléatoires N, X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui vérifient la relation suivante :

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad X(\omega) + Y(\omega) = N(\omega);$$

— pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

✍ *Cette dernière hypothèse est justifiée par le fait qu'on reconnaît ici un schéma de Bernoulli et que X représente, d'une certaine manière, le nombre de succès lors d'une succession de n tentatives (et Y représente alors le nombre d'échecs).*

❧ On en déduit avant toute chose que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[N = n]$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(n,q)$ avec $q = 1-p$. En effet,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y = k \mid N = n)\,\mathbf{P}(N = n) &= \mathbf{P}(Y = k, N = n) \\
&= \mathbf{P}(N - X = k, N = n) = \mathbf{P}(X = n-k, N = n) \\
&= \mathbf{P}(X = n-k \mid N = n)\,\mathbf{P}(N = n) \\
&= \binom{n}{n-k} p^{n-k} q^{n-(n-k)}\,\mathbf{P}(N = n) \\
&\qquad\qquad (\text{pour } 0 \leqslant n-k \leqslant n) \\
&= \binom{n}{k} q^k p^{n-k}\,\mathbf{P}(N = n) \qquad (\text{soit } 0 \leqslant k \leqslant n)
\end{aligned}$$

par symétrie des coefficients binomiaux.

1❧ On suppose pour commencer que la variable aléatoire N est presque sûrement constante :

$$\mathbf{P}(N = n) = 1.$$

Dans ces conditions, l'évènement $[N \neq n]$ est négligeable et

$$\begin{aligned}
\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) &= \mathbf{P}(X = k, N = n) + \mathbf{P}(X = k, N \neq n) \\
&= \mathbf{P}(X = k \mid N = n)\,\mathbf{P}(N = n) \\
&= \mathbf{P}(X = k \mid N = n).
\end{aligned}$$

La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

De même, la variable aléatoire Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,q)$.

❧ Comme N est presque sûrement constante, elle est indépendante de X. (Voir ci-dessous en cas de doute.) Comme $Y = N - X$ et que la covariance est linéaire à droite,

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{Cov}(X,N) - \mathbf{V}(X) = 0 - \mathbf{V}(X) = -npq < 0.$$

Comme la covariance de X et Y n'est pas nulle, ces deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

✍ *Comme* $\mathbf{P}(N = n) = 1$, *on a aussi* $\mathbf{P}(N = k) = 0$ *pour tout entier* $k \neq n$. *Pour* $k \neq n$ *et* $\ell \in \mathbb{N}$, *on a donc*

$$0 \leqslant \mathbf{P}(X = \ell, N = k) \leqslant \mathbf{P}(N = k) = 0$$

et donc

$$\mathbf{P}(X = \ell, N = k) = 0 = \mathbf{P}(X = \ell)\,\mathbf{P}(N = k).$$

Pour $k = n$ *et* $\ell \in \mathbb{N}$, *on a aussi (voir plus haut)*

$$\mathbf{P}(X = \ell, N = n) = \mathbf{P}(X = \ell) = \mathbf{P}(X = \ell)\,\mathbf{P}(N = n).$$

Ces calculs prouvent que X *et* N *sont indépendantes.*

2❧ On suppose maintenant que la variable aléatoire N suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.

D'après la formule des probabilités totales, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k \mid N = n)\,\mathbf{P}(N = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\
&= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda q}
\end{aligned}$$

et comme $-1 + q = -p$, la variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda p)$.

De même, Y suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda q)$.

En particulier, $\mathbf{E}(X) = \mathbf{V}(X) = \lambda p$.

❧ Quels que soient les entiers k et ℓ, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X = k, Y = \ell) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, Y = \ell, N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k, N - X = \ell, N = n) && \text{(puisque } X + Y = N\text{)} \\
&= \mathbf{P}(X = k, N = k + \ell) && \text{(contrainte } n = k + \ell\text{)} \\
&= \mathbf{P}(X = k \mid N = k + \ell)\,\mathbf{P}(N = k + \ell) \\
&= \binom{k+\ell}{k} p^k q^\ell e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!} \\
&= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda q}\frac{(\lambda q)^\ell}{\ell!} \\
&= \mathbf{P}(X = k)\,\mathbf{P}(Y = \ell).
\end{aligned}$$

Cela prouve bien que X et Y sont indépendantes.

En particulier, cette fois, la covariance de X et Y est nulle.