RMS 134 [1437]

Pour tous P *et* Q *dans* $E = \mathbb{R}[X]$, *on pose*

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

1❧ *Vérifier que* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *est un produit scalaire sur* E.

2❧ *Déterminer deux réels* a *et* b *tels que l'expression*

$$\varphi(a,b) = \int_0^1 (t^2 - at - b)^2\,dt$$

soit minimale de deux manières :
❦ *en construisant une base orthonormée de* $\mathbb{R}_2[X]$ *;*
❦ *en choisissant* a *et* b *de telle sorte que le polynôme* $(X^2 - aX - b)$ *soit orthogonal au sous-espace* $\mathbb{R}_1[X]$.

✍ *La première question est une question de cours archi-classique, il faut prendre soin de citer clairement tous les théorèmes qu'on applique (et ils sont quelques-uns).*

1❧ Comme P et Q sont des polynômes, la fonction $[t \mapsto P(t)Q(t)]$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale $\langle P \mid Q \rangle$ est bien définie (premier théorème : condition suffisante d'existence d'une intégrale).

Il est alors clair que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est une application bilinéaire et symétrique à valeurs réelles.

Comme la fonction $\left[t \mapsto P(t)^2\right]$ est positive et que les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant, l'intégrale $\langle P \mid P \rangle$ est positive (deuxième théorème : positivité de l'intégrale).

Comme la fonction $\left[t \mapsto P(t)^2\right]$ est <u>continue</u> et positive et que la longueur de l'intervalle d'intégration est <u>strictement positive</u>, si l'intégrale $\langle P \mid P \rangle$ est nulle, alors la fonction $\left[t \mapsto P(t)^2\right]$ est nulle sur l'intervalle d'intégration $[0,1]$ (troisième théorème : nullité de l'intégrale).

Comme P est un polynôme et qu'il possède une infinité de racines (= tous les réels entre 0 et 1 au moins), c'est le polynôme nul (quatrième théorème : caractérisation du polynôme nul).

Par conséquent, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est bien une forme bilinéaire, symétrique, définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire.

2❧ L'expression $\varphi(a,b)$ est égale à $\|X^2 - (aX+b)\|^2$. D'après le cours, cette expression est minimale si, et seulement si, $(aX+b)$ est le projeté orthogonal du vecteur X^2 sur le sous-espace $\mathrm{Vect}(1,X) = \mathbb{R}_1[X]$.

✍ *La suite de l'exercice consiste donc à mettre en pratique deux caractérisations du projeté orthogonal.*

Première caractérisation

Si $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ *est une base* <u>*orthonormée*</u> *du sous-espace* F, *alors le projeté orthogonal du vecteur* x *sur* F *est le vecteur*

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{d} \langle e_k \mid x \rangle \cdot e_k.$$

NB : si $(\varepsilon_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ *est une base* <u>*orthogonale*</u> *de* F, *alors*

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\langle \varepsilon_k \mid x \rangle}{\|\varepsilon_k\|^2} \cdot \varepsilon_k.$$

Deuxième caractérisation

Si $(u_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$ *est une base de* F, orthogonale ou non, *le projeté orthogonal de* x *sur* F *est l'unique vecteur* y *tel que*

$$y \in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_d) = F \quad \textit{et} \quad \forall\, 1 \leqslant k \leqslant d, \quad \langle y - x \mid u_k \rangle = 0.$$

❧ On connaît une base de F : le couple $(1, X)$. On peut donc choisir $\varepsilon_1 = 1$ et chercher ε_2 orthogonal à ε_1 de la forme

$$\varepsilon_2 = X + \lambda.$$

✍ *On aura reconnu une version élémentaire de l'algorithme de Gram-Schmidt.*

On a donc

$$0 = \langle\, \varepsilon_1 \,|\, \varepsilon_2 \,\rangle = \int_0^1 1 \cdot (t + \lambda)\, dt = \frac{1}{2} + \lambda,$$

ce qui donne

$$\varepsilon_2 = X - \frac{1}{2}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon_1\|^2 &= \int_0^1 1\, dt = 1,\\
\|\varepsilon_2\|^2 &= \int_0^1 t^2 - t + \frac{1}{4}\, dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12},\\
\langle\, X^2 \,|\, \varepsilon_1 \,\rangle &= \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3},\\
\langle\, X^2 \,|\, \varepsilon_2 \,\rangle &= \int_0^1 t^3 - \frac{1}{2}t^2\, dt = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Le projeté orthogonal de $x = X^2$ sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ est donc

$$\frac{1/3}{1} \cdot 1 + \frac{1/12}{1/12} \cdot \Big(X - \frac{1}{2}\Big) = X - \frac{1}{6}.$$

✍ *Une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ est*

$$\Big(\frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}, \frac{\varepsilon_2}{\|\varepsilon_2\|}\Big) = \Big(1, \sqrt{12} \cdot \Big(X - \frac{1}{2}\Big)\Big).$$

(Il faut penser à la racine carrée !)

❧ Le projeté orthogonal du vecteur $x = X^2$ sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ est de la forme $y = aX + b$. Il doit vérifier de plus

$$\langle\, X^2 - (aX + b) \,|\, 1 \,\rangle = \langle\, X^2 - (aX + b) \,|\, X \,\rangle = 0$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 t^2 - at - b\, dt = \int_0^1 t^3 - at^2 - bt\, dt = 0.$$

On obtient ainsi le système

$$\begin{cases} a/2 + b = 1/3 \\ a/3 + b/2 = 1/4 \end{cases}$$

dont la solution est bien entendu $(a, b) = (1, -1/6)$.