RMS 134 [1477]

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note r_n, le reste de la division euclidienne de n par 5.

1❧ *La série $\sum \frac{r_n}{n(n+1)}$ est convergente.*

2❧ *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{k(k+1)}.$$

Exprimer S_{5n} en fonction des nombres harmoniques

$$H_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}.$$

3❧ *En déduire la valeur de*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{n(n+1)}.$$

1❧ Par définition de la division euclidienne,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant r_n < 5.$$

Donc

$$\frac{r_n}{n(n+1)} \underset{n \to +\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

et, par comparaison avec une série de Riemann, la série est (absolument) convergente.

2❧ Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout entier $0 \leqslant r \leqslant 4$,

$$r_k = r \iff \exists\, \ell \in \mathbb{N}, \quad k = 5\ell + r.$$

On peut donc décomposer S_{5n} en somme de cinq termes.

$$\begin{aligned} S_{5n} &= \sum_{k=1}^{5n} \frac{r_k}{k(k+1)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+1)(5\ell+2)} + 2\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+2)(5\ell+3)} + 3\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+3)(5\ell+4)} \\ &\qquad + 4\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{(5\ell+4)(5\ell+5)} + 0\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{5\ell(5\ell+1)} \end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$$

permet de simplifier l'expression.

$$\begin{aligned} S_{5n} &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+1} - \frac{1}{5\ell+2} + 2\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+2} - \frac{1}{5\ell+3} \\ &\qquad + 3\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+3} - \frac{1}{5\ell+4} + 4\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+4} - \frac{1}{5\ell+5} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+1} + \frac{1}{5\ell+2} + \frac{1}{5\ell+3} + \frac{1}{5\ell+4} - \frac{4}{5\ell+5} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{5\ell+1} + \frac{1}{5\ell+2} + \frac{1}{5\ell+3} + \frac{1}{5\ell+4} + \frac{1}{5\ell+5} - \frac{1}{\ell+1} \\ &= \sum_{k=1}^{5n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_{5n} - H_n. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Il faut alors comparer la somme

$$H_{5n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k}$$

à l'intégrale

$$I_n = \int_n^{5n} \frac{dt}{t} = \ell n\, 5.$$

La méthode usuelle (FAITES UNE FIGURE !) nous donne :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \ell n\, 5 + \frac{1}{5n} \leqslant S_{5n} \leqslant \ell n\, 5 + \frac{1}{n}$$

et on déduit du théorème d'encadrement que

$$\lim_{n \to +\infty} S_{5n} = \ell n\, 5.$$

$\boxed{4}$ Comme la série converge, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de ses sommes partielles est convergente. Toute suite extraite d'une suite convergente est elle-même convergente et tend vers la même limite. Par conséquent,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} S_{5n} = \ell n\, 5.$$

Autrement dit,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{n(n+1)} = \ell n\, 5.$$

✍ *En présentant les calculs de manière un peu plus abstraite (c'est-à-dire en faisant intervenir une somme double), on devrait pouvoir généraliser le résultat au cas de la division euclidienne par un entier naturel $p \geqslant 2$ quelconque.*