# RMS 134 [1455]

> *Soient $E$, un espace euclidien et $u$, un endomorphisme de $E$ tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$. Un tel endomorphisme est dit **normal**.*
>
> **1❧** *Pour tout $x \in E$,*
> $$\|u^*(x)\|^2 = \|u(x)\|^2.$$
> **2❧** *En déduire que $u$ et $u^*$ ont mêmes valeurs propres et mêmes sous-espaces propres.*
>
> **3❧** *Démontrer que les sous-espaces propres de $u$ sont deux à deux orthogonaux.*
>
> **4❧** *Si $u$ est diagonalisable, alors $u$ est auto-adjoint.*

✍ *Les endomorphismes auto-adjoints et les isométries vectorielles sont évidemment des endomorphismes normaux.*

**1❧** Pour tout vecteur $x \in E$,

$$\begin{aligned}\|u^*(x)\|^2 &= \langle u^*(x) \mid u^*(x) \rangle = \langle x \mid (u \circ u^*)(x) \rangle \\ &= \langle x \mid (u^* \circ u)(x) \rangle && (u \text{ et } u^* \text{ commutent}) \\ &= \langle u(x) \mid u(x) \rangle = \|u(x)\|^2.\end{aligned}$$

**2❧** Comme l'endomorphisme $I$ est auto-adjoint,

$$(u - \lambda I)^* = (u^* - \lambda I).$$

Par conséquent, si l'endomorphisme $u$ est normal, alors

$$(u - \lambda I)^* \circ (u - \lambda I) = (u - \lambda I) \circ (u^* - \lambda I).$$

D'après la question précédente,

$$\forall\, x \in E, \quad \|(u^* - \lambda I)(x)\|^2 = \|(u - \lambda I)(x)\|^2$$

et en particulier

$$\forall\, x \in E, \quad u^*(x) - \lambda x = 0_E \iff u(x) - \lambda x = 0_E.$$

Autrement dit : $u$ et $u^*$ ont mêmes valeurs propres et mêmes sous-espaces propres.

✍ *Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de $E$ et si la matrice d'un endomorphisme $u$ quelconque relative à cette base $\mathscr{B}$ est la matrice $A$, alors la matrice de l'adjoint $u^*$ relative à $\mathscr{B}$ est la matrice $A^\top$.*

*On en déduit que, d'une manière générale, les endomorphismes $u$ et $u^*$ ont mêmes valeurs propres (les polynômes caractéristiques sont égaux), mais aussi que les sous-espaces propres associés à une même valeur propre ont même dimension puisque*

$$\operatorname{rg}(u - \lambda I) = \operatorname{rg}(u^* - \lambda I).$$

*L'hypothèse de normalité sur $u$ nous donne un résultat beaucoup plus fort : les sous-espaces propres sont égaux !*

❧ **Variante.**
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de $u$. Le sous-espace propre

$$F = \operatorname{Ker}(u - \lambda I)$$

est stable par $u^*$ (puisque $u$ et $u^*$ commutent) et donc par $(u^* - \lambda I)$.

Quels que soient les vecteurs $x$ et $y$ dans $F$,

$$\langle u(x) - \lambda x \mid y \rangle = \langle 0_E \mid y \rangle = 0$$

mais, par définition de l'adjoint,

$$0 = \langle u(x) - \lambda x \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, u^*(y) - \lambda y \rangle .$$

On a remarqué que le vecteur $u^*(y) - \lambda y$ appartenait au sous-espace $F$ et on voit qu'il est orthogonal à tous les vecteurs $x$ de $F$. Il s'agit donc du vecteur nul et on a ainsi démontré que

$$\forall\, y \in \operatorname{Ker}(u - \lambda I), \qquad u^*(y) = \lambda y.$$

Autrement dit, $\operatorname{Ker}(u-\lambda I) \subset \operatorname{Ker}(u^*-\lambda I)$. Par symétrie, l'inclusion réciproque est vraie et les sous-espaces propres sont donc égaux.

**3❧** Soient $\lambda$ et $\mu$, deux valeurs propres distinctes de $u$. On considère un vecteur propre $x$ associé à $\lambda$ et un vecteur propre $y$ associé à $\mu$. On déduit de la question précédente que $u^*(y) = \mu y$.

Par conséquent,

$$\lambda \langle x \,|\, y \rangle = \langle u(x) \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, u^*(y) \rangle = \mu \langle x \,|\, y \rangle .$$

Comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit que $\langle x \,|\, y \rangle = 0$ et donc que les sous-espaces propres $\operatorname{Ker}(u - \lambda I)$ et $\operatorname{Ker}(u - \mu I)$ sont orthogonaux.

**4❧** Si l'endomorphisme normal $u$ est diagonalisable, alors

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} \operatorname{Ker}(u - \lambda I).$$

En choisissant une base orthonormée de chaque sous-espace propre de $u$, on obtient alors une base orthonormée de $E$ constituée de vecteurs propres de $u$.

Dans cette base, la matrice de $u$ est diagonale (base de vecteurs propres) et donc symétrique. Comme la matrice de $u$ relative à une base <u>orthonormée</u> bien choisie est symétrique réelle, on en déduit que $u = u^*$.