RMS 134 [1497]

> *Déterminer le rayon de convergence de la série entière*
>
> $$\sum n^{(-1)^n} x^n$$
>
> *et calculer sa somme.*

❧ Il faut d'abord comprendre que la série entière étudiée est la somme de deux séries entières :

$$\sum (2k)x^{2k} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{1}{2k+1}x^{2k+1}.$$

Il est clair que, pour $|x| < 1$, les deux termes généraux sont des suites bornées, donc le rayon de convergence de la somme est au moins égal à 1.

D'autre part, pour $|x| > 1$, la suite de terme général $n^{(-1)^n} x^n$ n'est pas bornée (par croissances comparées d'une suite géométrique divergente et d'une suite de puissances). Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière est inférieur à 1.

En conclusion, le rayon de convergence est égal à 1.

❧ Fixons $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. Alors

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2kx^{2k} = x\sum_{k=1}^{+\infty} 2kx^{2k-1}.$$

(Le terme en $k = 0$ est nul !)

On reconnaît ici la série dérivée de $\sum x^{2k}$. Comme le rayon de convergence est strictement positif, on peut dériver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence $]-1, 1[$:

$$\begin{aligned}\forall\, x \in\,]-1,1[, \quad S_1(x) &= x\frac{d}{dx}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}(x^2)^k\Big)\\ &= x\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{1-x^2}\Big)\\ &= x\frac{2x}{(1-x^2)^2}.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$S_2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

et on reconnaît cette fois la série primitive de $\sum x^{2k}$. On peut primitiver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence (toujours parce que le rayon de convergence est strictement positif) et comme $S_2(0) = 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\forall\, x \in\,]-1,1[, \quad S_2(x) &= \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}\,dt\\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\ell n\,\frac{1+x}{1-x}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2}\ell n\,\frac{1+x}{1-x}$$

pour tout $x \in\,]-1, 1[$.