RMS 134 [1422]

Soit $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe un entier naturel $n \geqslant 1$ tel que $M^n = I_2$. Alors $M^{12} = I_2$.

❧ La matrice M admet un polynôme annulateur scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$:

$$X^n - 1 = \prod_{0 \leqslant k < n} (X - e^{i2k\pi/n})$$

donc elle est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ et son polynôme caractéristique est un polynôme de degré 2, lui aussi scindé dans $\mathbb{C}[X]$, dont les racines (= les valeurs propres complexes de M) sont des racines de $X^n - 1$, c'est-à-dire des racines n-ièmes de l'unité.

Comme la matrice M est à coefficients <u>entiers</u>, son polynôme caractéristique est lui aussi à coefficients <u>entiers</u> et donc réels. Trois cas se présentent donc :

— ou bien le polynôme caractéristique admet une racine réelle double (1 ou -1) et, comme M est diagonalisable, $M = \pm I_2$, donc $M^2 = I_2$ et a fortiori $M^{12} = I_2$;

— ou bien le polynôme caractéristique admet deux racines distinctes (1 et -1) et, comme M est diagonalisable, M est semblable à la matrice de symétrie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donc $M^2 = I_2$ et, une fois encore, $M^{12} = I_2$;

— ou bien le polynôme caractéristique admet deux racines complexes conjuguées

$$\zeta = e^{i2k\pi/n} \qquad \text{et} \qquad \overline{\zeta} = e^{-2ik\pi/n}$$

si bien que

$$\chi = (X - \zeta)(X - \overline{\zeta}) = X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}X + 1$$

et la matrice M est alors semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \overline{\zeta} \end{pmatrix}$.

✍ *Pour bien comprendre la discussion suivante, il faut se rappeler que l'ensemble $\mathbb{U}_m$ des racines m-ièmes de l'unité est contenu dans l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité si, et seulement si, m divise n.*

Dans ce dernier cas, comme le polynôme caractéristique est à coefficients <u>entiers</u>, il faut que les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k < n$ vérifient la condition

$$2\cos\frac{2k\pi}{n} \in \mathbb{Z}$$

c'est-à-dire

$$\cos\frac{2k\pi}{n} \in \{0, \pm 1/2, \pm 1\}.$$

Si ce cosinus est égal à 0, alors $\frac{2k\pi}{n} = \pi/2$ et les racines du polynôme caractéristique sont $\pm i \in \mathbb{U}_4 \subset \mathbb{U}_{12}$.

Si ce cosinus est égal à ± 12, alors $\frac{2k\pi}{n} = \pi/3$ ou $2\pi/3$ et les racines du polynôme caractéristiques sont $e^{\pm\pi/3}$ (qui appartiennent à $\mathbb{U}_6$ et donc à $\mathbb{U}_{12}$) ou $e^{\pm 2\pi/3}$ (racines cubiques de l'unité, qui appartiennent aussi à $\mathbb{U}_{12}$).

Enfin, si ce cosinus est égal à ± 1, alors $\frac{2k\pi}{n} = 0$ ou π et, dans ce cas, les racines sont réelles : ± 1 et appartiennent à $\mathbb{U}_{12}$.

Dans tous les cas, la matrice M est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\zeta, \overline{\zeta})$ et la matrice M^{12} à

$$\begin{pmatrix} \zeta^{12} & 0 \\ 0 & \overline{\zeta}^{12} \end{pmatrix} = I_2$$

(puisque ζ et $\overline{\zeta}$ sont nécessairement des racines douzièmes de l'unité.

Seule la matrice I_2 est semblable à I_2, donc $M^{12} = I_2$.